Súmate
PROGRAMA DE VERANO

Manual para el estudiante

NIVEL

B3

Recrea
Educación para refundar 2040

Educación

Jalisco
GOBIERNO DEL ESTADO

Súmate
Programa de verano
de matemáticas
Manual B 3

Secretaría de Educación del Estado de Jalisco

Juan Carlos Flores Miramontes
Secretario de Educación del Estado de Jalisco

Pedro Diaz Arias
Subsecretario de Educación Básica

Nadia Soto Chávez
Directora de Articulación de Programas Estratégicos

Eduardo Moreno Casillas
Director de Articulación de Programas Estratégicos

Cuauhtémoc Cruz Herrera
Director de Ciencias Exactas y Habilidades Mentales

Edita:

Secretaría de Educación, Gobierno de Jalisco
© Dirección General de Programas Estratégicos
Edición: julio de 2022

Coordinación de producción:
Cuauhtémoc Cruz Herrera
Martha Patricia Estrada Núñez

Coordinación y diseño editorial:
Ana Itzel López Romero

Arte de portada:
Martha Patricia Estrada Núñez

Impreso en México

Presentación

Juan Carlos
Flores
Miramontes

El Modelo Educativo que compartimos aquí surge como respuesta a la demanda social de contar con una educación de calidad que forme individuos capaces de desenvolverse en cualquier ámbito de la vida, con sensibilidad y responsabilidad social. De aquí nuestra intención de formar estudiantes sensibles a su propio proceso de aprendizaje y al de sus compañeros, a través de conocimientos significativos y relevantes, y de consolidar el enfoque humanista e integral.

Es así como la enseñanza de las matemáticas debe recrearse como un conjunto de conceptos, métodos y técnicas que permitan analizar fenómenos y situaciones cotidianas en diferentes contextos, y así, mediante la interpretación de la información cuantitativa y cualitativa con que se cuente, los estudiantes sean capaces de solucionar las problemáticas que se les presenten día a día.

Buscando responder a esta propuesta, surge el **Programa de verano de Matemáticos, *SÚMATE***, como una estrategia que desarrolle habilidades del pensamiento lógico matemático en estudiantes de educación básica.

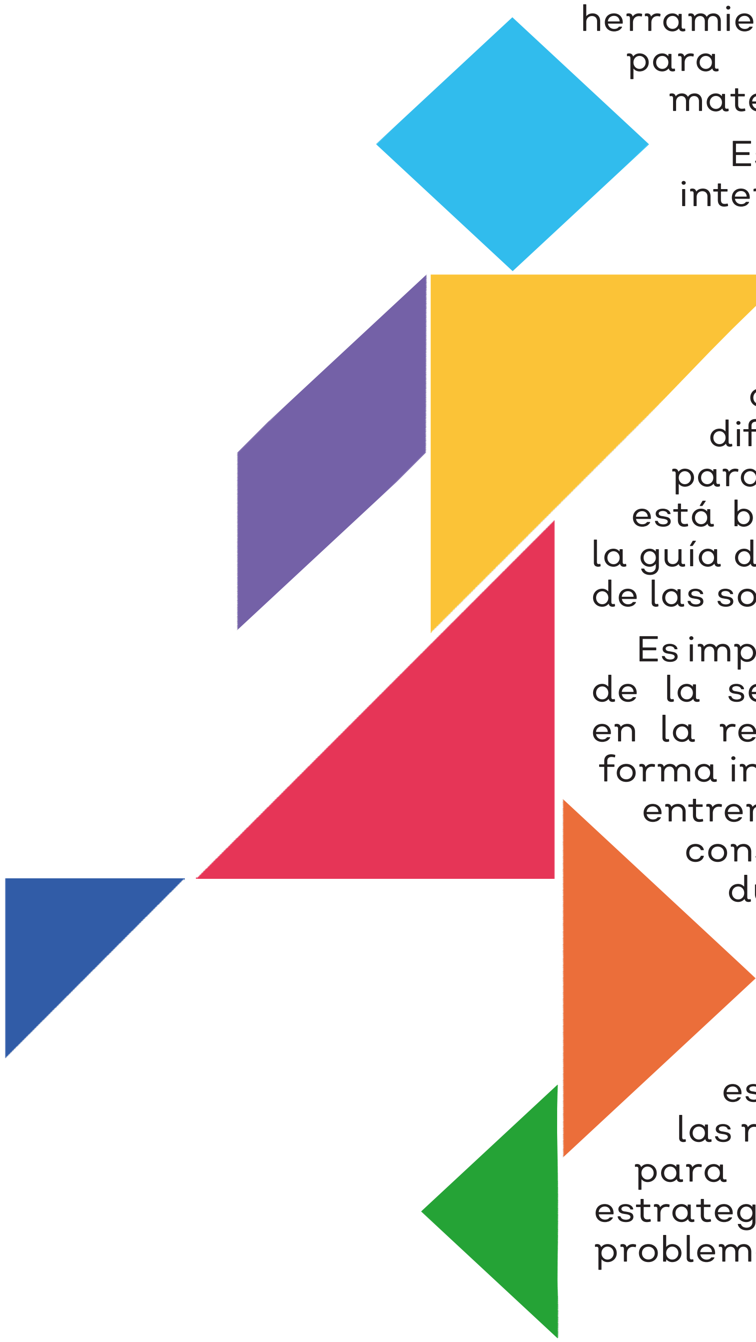
Esta propuesta se basa en la conceptualización de que el conocimiento no es unidireccional, sino una construcción bidireccional entre el asesor y el estudiante, permitiendo que éste se equivoque y culmine en el proceso de su propio aprendizaje. Asimismo, cuenta con elementos de la propuesta teórico-crítica de las matemáticas y de la propuesta sociológica del mismo nombre, la cual propone cuestionar los métodos y resultados a partir de un aprendizaje dialógico y democrático. En esta metodología se observa el trabajo colaborativo, pero lo más importante es el proceso cognitivo interno de cada estudiante.

Los principios refundacionales a los cuales aporta ***SÚMATE*,** dentro del Proyecto “Recrea, Educación para Refundar 2040” son: **La formación de ciudadanía y la mejora de la calidad de los aprendizajes en y para la vida**.

De tal manera, seguiremos avanzando hacia la mejora continua de tu educación, niña, niño, joven, estudiantes de Jalisco; con la gestión transformadora del sistema educativo como parte de las metodologías que se han implementado para la operación del proyecto del que forma parte este manual que tienes en tus manos.

Cómo usar este manual

El presente manual está dirigido a los alumnos que cursan de 1° a 3° grados de secundaria en el estado de Jalisco, quiénes serán capacitados para utilizar herramientas y estrategias adecuadas para la resolución de problemas matemáticos.



Está dividido en 8 sesiones intensivas que comprenden cuatro áreas distintas: Teoría de Números, Combinatoria, Geometría y Álgebra. Cada sesión contiene una secuencia de problemas ordenados por dificultad y por tipos de estrategias para trabajar. Dicha metodología está basada en el trabajo individual, la guía del entrenador y la socialización de las soluciones con el resto del grupo.

Es importante que en la primera mitad de la sesión (50 minutos) se trabaje en la resolución de los problemas de forma individual, y si el alumno tiene un entrenador en ese momento, pueda consultar aspectos de su solución, dudas e incluso pedir alguna pista que lo ayude a resolver el problema. La segunda mitad de la sesión, nos permitirá compartir nuestras estrategias de solución y conocer las realizadas por el resto del grupo, para acrecentar nuestra gama de estrategias a utilizar en la resolución de problemas.

Índice

Indicaciones generales para cada sesión:

Lee con cuidado todos los problemas.

Las preguntas **no son capciosas** y toda la información de cada enunciado es útil.

Puedes intentar cada problema de la manera que tú quieras, **no hay sólo una manera de encontrar la respuesta correcta.**

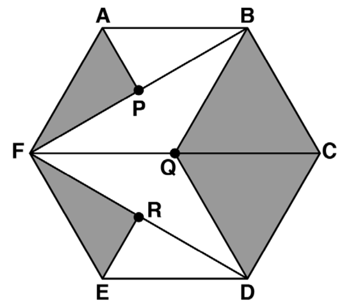
Si tienes **alguna duda** sobre el enunciado de algún problema, **pregunta** cuanto antes al asesor o asesora a cargo.

Intenta todos los problemas y comparte tus ideas con el asesor o asesora y tus compañeros.

Escribe cada idea y cada paso que vayas recorriendo para tu solución.

Sesión 1: Medianas y alturas

1. El siguiente es un hexágono cuya área es π . P, Q y R son los puntos medios de FB, FC y FD, respectivamente. ¿Cuál es el valor del área sombreada?

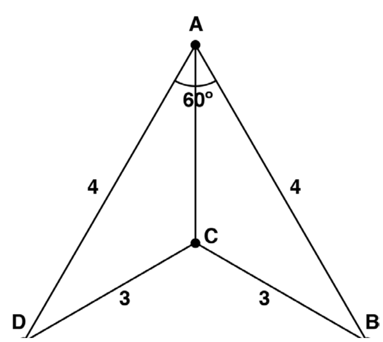


2. Demuestra que las tres medianas de un triángulo lo dividen en seis triángulos equivalentes (con misma área).

3. Sea ABC un triángulo acutángulo (un triángulo cuyos ángulos son todos menores que 90°). Se construye el ortocentro de manera que D sea el pie de altura (un pie de altura es el punto en el cual cruzan la altura de un triángulo con el lado opuesto) desde C, E es el pie de altura desde A, F el pie de altura desde B y H el ortocentro. Además, sabemos que BF = 8, FC = 6 y el perímetro de AHF = 9. Encuentra la medida del lado AH.

4. En un triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas desde A, B, y C y se nombran AP, BQ y CR, respectivamente. Los triángulos formados por los pies de altura de un triángulo se le llama triángulo órtico. El triángulo PQR es el triángulo órtico de ABC. Demuestra que los triángulos rectángulos no tienen triángulos órticos. Explica por qué pasa así, a través de propiedades matemáticas.

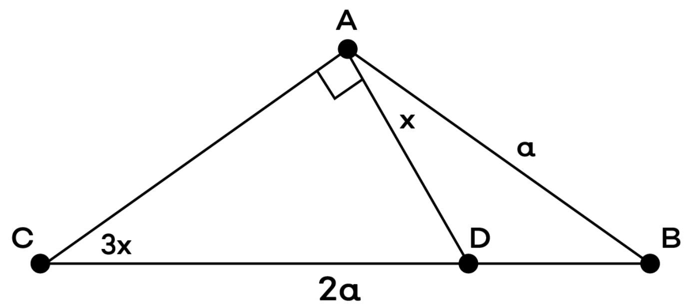
5. En la siguiente figura, encuentra el valor de AC.



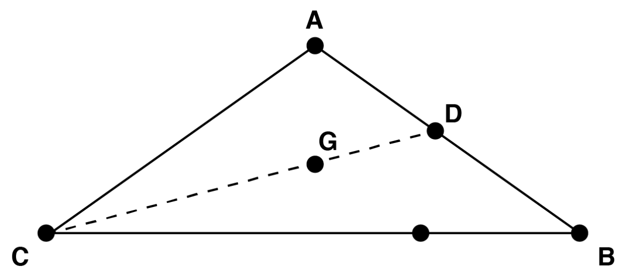
6. En un triángulo rectángulo se conoce que el perímetro es P = 96 y la altura es 96/5 . Determina la longitud de los lados del triángulo.

7. Sea AD la altura de un triángulo ABC y H el ortocentro de dicho triángulo. Demuestra que BD x DC = AD x DH.

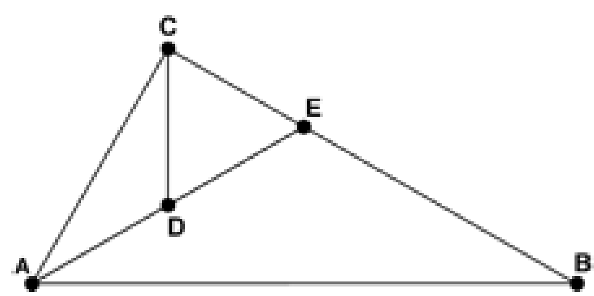
8. En el siguiente triángulo ABC encuentre el valor del ángulo x.



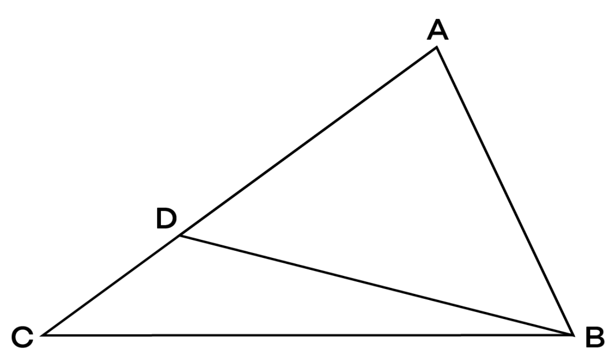
9. En el triángulo ABC se traza la mediana CD de 28 cm. Si G es el baricentro, ¿cuánto mide GD?



10. En la siguiente figura CD es la mediana del triángulo ACE y se conoce la siguiente relación 2BE = 5CE. Encuentre la relación entre el área del triángulo ACD y el área del triángulo ABC.



11. En el triángulo ABC tenemos que AB = AD y ∠ABC − ∠ACB = 45°. ¿Cuál es la medida de ∠CBD?



Sesión 2: Aritmética modular

1. Astrid dividió un número a entre 10 y le quedó 5 como residuo. Beatriz dividió un número b entre 10 y le quedó como residuo 4. Cristy calculó el triple de la suma de los números de Astrid y Beatriz y dividió el resultado entre 10. ¿Cuál es el residuo que obtuvo Cristy al final?

2. Encuentra el último dígito de 2017^{2017}.

3. Un número entero deja el mismo residuo cuando lo dividimos entre 7, entre 9 o entre 11. Si este número tiene tres dígitos, ¿cuál es el mayor valor que puede tener?

4. ¿Cuáles son los últimos 5 dígitos del número $1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{111\ldots111}_{2014\,\text{veces}}$?

5. ¿Cuáles de los siguientes números es siempre un número impar para cualquier número entero?

a) $13A$
b) $13 + 13A$
c) $13 + A^{13}$
d) $13 + 2A$
e) $13 + 23A$

6. Encuentra la suma de los dígitos del producto $\underbrace{111\ldots111}_{2016\text{ veces}} \times 2016$.

7. Encuentra el último dígito de la suma $1^{2016} + 2^{2016} + 3^{2016} + \ldots + 2016^{2016}$.

8. Del conjunto A = {1, 2, 3, ..., 2019} se va a formar un conjunto B con 2018 elementos tal que la suma de todos los elementos de B sea múltiplo de 3.

a) ¿De cuántas maneras se puede hacer la elección de los elementos de B?
b) ¿Y si B tuviera 2017 elementos?
c) ¿Y si formamos a B con 2016 elementos?

Nota: En un conjunto, el orden de los elementos no es importante.

9. Si p es un número primo, entonces ¿cuál de las siguientes no siempre son verdaderas?

a) El número 2p es un número par.
b) El número p es impar.
c) El número $2p + 3$ es impar.
d) El número p^2 no es un número primo.
e) El número p^5 tiene 6 divisores.
f) El número $3p + p$ no es un número primo.
g) El número $p + 1$ es un número par.
h) El número $p + 1$ es un número compuesto.
i) El número $p^2 + 1$ es par.

10. Encuentra los últimos cinco dígitos de 15^{2015}.

11. De las siguientes afirmaciones, sólo dos son verdaderas. ¿Cuánto vale *A*?

a) $A + 41$ es un cuadrado perfecto.
b) El último dígito de *A* es 1.
c) $A - 48$ es un cuadrado perfecto.

12. Encuentra el entero más chico, tal que al dividirlo entre 3 queda residuo 1, al dividirlo entre 5 queda residuo 2 y al dividirlo entre 7 queda residuo 3.

13. ¿Cuál es el último dígito del producto $3^{2019} \times 7^{2021}$?

Sesión 3: Permutaciones

1. De un grupo de 20 estudiantes se va a escoger un presidente, un vicepresidente y un tesorero. ¿De cuántas maneras se puede realizar esta elección?

2. De entre los 11 miembros de un grupo de payasos de circo, ellos deben de votar por un payaso que trabaje con monos, otro que trabaje con elefantes y otro que trabaje con tigres. ¿Cuántos resultados diferentes puede tener la elección?

3. ¿Cuántos números de cinco cifras hay tales que todas sus cifras son dígitos pares?

4. Considerando el problema anterior, ¿cuántos hay tales que todos los dígitos del número son pares y diferentes entre sí?

5. ¿Cuántas palabras diferentes (con o sin sentido) se pueden formar con todas las letras de la palabra JALISCO?

6. ¿Y si sólo utilizamos 5 letras de la palabra JALISCO?

7. Mario hizo galletas con betún de sabores diferentes y quiere ponerlas en una caja circular. En la caja caben 9 galletas. ¿De cuántas maneras las puede acomodar en la caja?

8. Si en el problema anterior hay galletas con betún de chocolate y betún de limón que no pueden estar una junto a la otra en la caja, ¿de cuántas maneras se pueden acomodar?

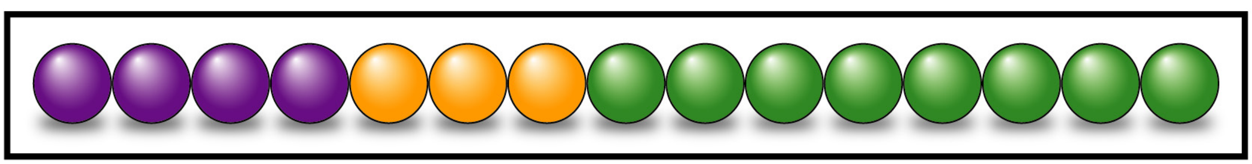
9. En un parque, 2019 niños van a jugar un juego en el que se toman de las manos y forman una rueda. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar?

10. Se quieren pintar las 8 casas de una cuadra. Si hay 5 colores diferentes, ¿de cuántas maneras se pueden pintar?

11. Jimena tiene 26 carritos de juguete que son iguales. Cuando termina de jugar, su papá le dice que debe de guardarlos en cajas. Si Jimena tiene 3 cajas iguales para sus carritos, ¿de cuántas maneras los puede guardar? Puede quedar una o más cajas vacías.

12. Francisca va a comprar una docena de flores. En la florería hay claveles, girasoles y gerberas. ¿De cuántas maneras puede escoger Francisca su docena de flores si puede escoger las que quiera de cualquier tipo?

13. José Pedro quiere regalarle a su amigo Esteban una caja de canicas. En la caja caben 15 canicas y José Pedro la quiere llenar con canicas de a lo más tres colores diferentes. Además, las va a acomodar de tal manera que todas las canicas de un color queden una junto a la otra. En la figura se muestra un ejemplo del acomodo de las canicas. Si en la tienda venden canicas de color azul, rojo, morado, verde y amarillo, ¿cuántas cajas diferentes puede regalar José Pedro?



Sesión 4: Ecuaciones

1. Una colección de monedas antiguas de 5 y 10 pesos, suman 85 pesos. Si hay 12 monedas en total, ¿cuántas monedas de 10 pesos hay?

2. Si la mitad del perímetro de un triángulo equilátero con lados x es igual al triple del perímetro de un cuadrado con lados s, ¿a qué equivale x en términos de s?

3. En un parque de diversiones 6 entradas de adulto y 8 de niño cuestan 880 pesos, y 4 entradas de adulto y 5 de niño, 570 pesos, ¿cuál es el precio de entrada por un adulto y por un niño?

4. Si $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$ y $\frac{y}{z}=\frac{2}{7}$, entonces ¿a qué equivale $\frac{z}{x}$?

5. Sea x un número tal que $x+\frac{1}{x}=5$, encuentra el valor de $x^3+\frac{1}{x^3}$.

6. Encuentra la siguiente suma: $a \times 1 + \overline{aa} \times 2 + \overline{aaa} \times 3 + \overline{aaaa} \times 4$.

Nota: La línea horizontal sobre a, implica que es a está cumpliendo como dígito, no variable.

7. Dado que X es un entero tal que $-4 \leq X \leq 3$ y Y es un número primo. Encuentra el mayor valor posible de $X^2 - Y^2$.

8. Encuentra todos los valores posibles de $\frac{x}{y}$ dado que $21x^2 - 10xy + y^2 = 0$ y $y \neq 0$.

9. Si a y b son números distintos que cumplen que $a^2 + b^2 = 4ab$, ¿cuál es el valor de $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$?

10. Encuentra los valores de x y y en la siguiente ecuación: $|x - 7|+\sqrt{y+8}=0$.

11. Si x y y son enteros positivos, encuentra los valores que satisfagan la siguiente ecuación: $x^2 - 9y^2 = 43$.

12. Dado que $xy - x - y = 403$, donde x y y son números impares enteros, calcula el valor de $x + y$.

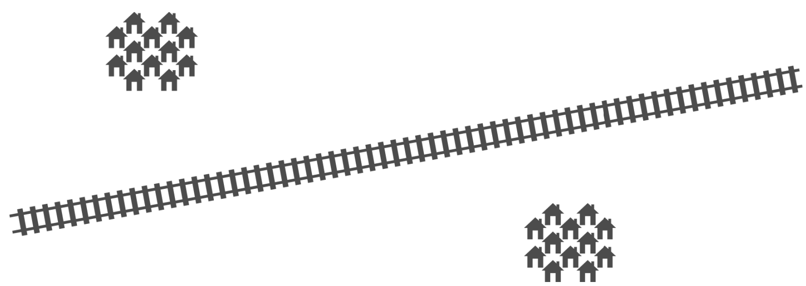
13. Dado que $x^2 - 7x + 1 = 0$, encuentra el valor de $x^4+\frac{1}{x^4}$.

14. Si a, b y $\frac{2017}{ab}$ son enteros, ¿cuántos valores posibles de $a - b$ hay?

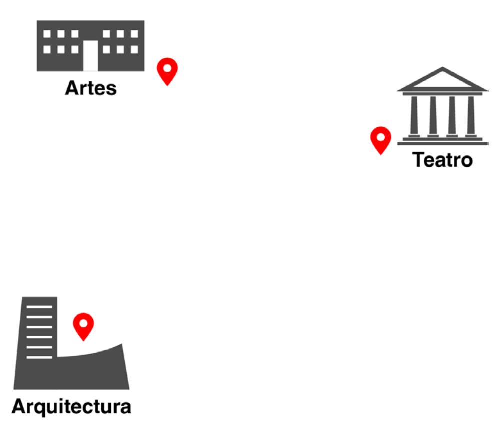
Sesión 5: Bisectrices y mediatrices

1. Dado un triángulo ABC, encuentra un punto X sobre AB y uno Y sobre AC de modo que XY = BX + CY, siendo XY paralela a BC. Al resolver este problema, asegúrate de indicar los pasos que seguiste para hacerlo y por qué.

2. Se quiere construir una vía del tren entre los pueblos de Techaluta de Montenegro y San Andrés Ixtlán. ¿Dónde puede estar la estación de tal manera que esté a igual distancia de ambos pueblos y esté sobre la vía del tren? Explica los pasos que seguiste para trazar la ubicación de la estación del tren.



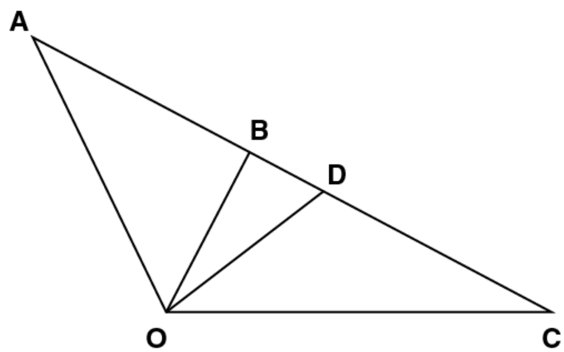
3. Paty vende dulces en su universidad. Ella le vende a los estudiantes de la facultad de artes plásticas a los de la facultad de teatro y a los estudiantes de arquitectura. Los edificios de cada facultad están en diferentes puntos de la universidad como se muestra en la figura. Paty quiere encontrar un punto para vender sus dulces de tal manera que los estudiantes de las tres facultades deban de caminar exactamente la misma distancia para llegar a su puesto. ¿Dónde debe de poner su puesto de dulces Paty? Justifica tu respuesta y traza el punto.



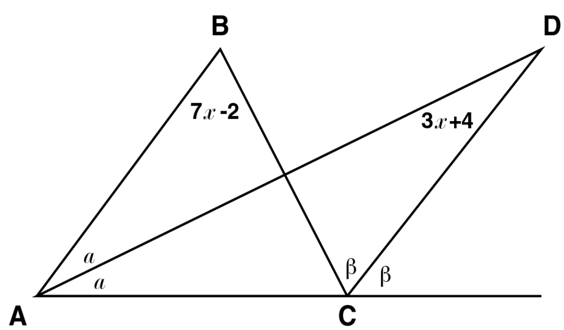
4. Dado un triángulo de lados 36, 54 y 70 se traza la bisectriz del ángulo opuesto al lado mayor. Encuentra la diferencia entre los segmentos que se forman sobre dicho lado.

Sesión 5

5. En el siguiente triángulo AOC, sabemos que la diferencia entre los ángulos ∢AOD - ∢DOC = 30°. También sabemos que el segmento OB es la bisectriz del ángulo ∢AOC. Encuentra la medida del ángulo ∢BOD.

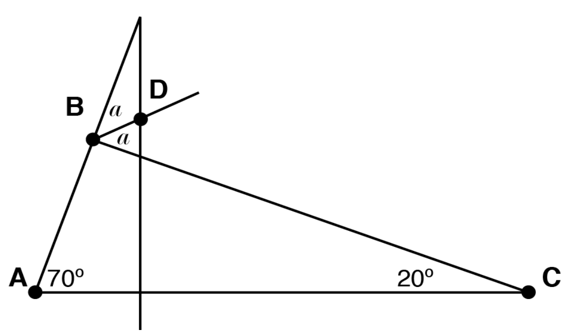


6. Dada la siguiente figura, calcula el valor de los ángulos ∢ABC y ∢ADC.

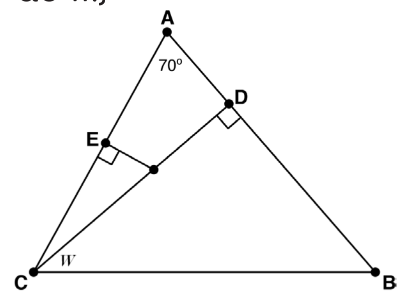


7. En un triángulo ABC el ángulo ∢CBA es 40° mayor que el ángulo ∢BAC. Si se traza la bisectriz del ángulo ∢BCA y la mediatriz de AB ¿Cuál es el valor del ángulo formado por la bisectriz y la mediatriz?

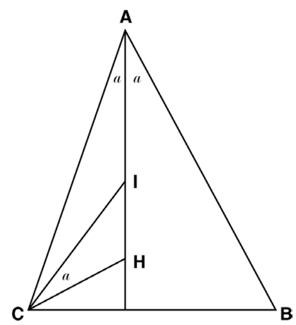
8. En un triángulo ABC se traza la mediatriz de AC y la bisectriz exterior BD (segmento que divide al ángulo exterior en dos ángulos iguales). Si ∢BAC=70° y ∢BCA=20°. ¿Cuál es el valor del ángulo formado por la bisectriz y la mediatriz?



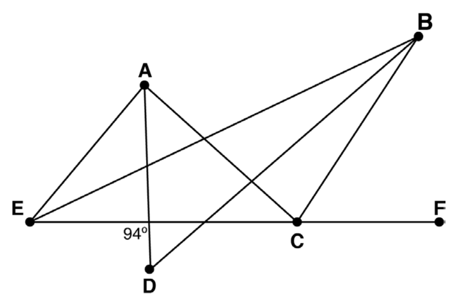
9. En el triángulo ABC de la figura los puntos D y E son los puntos medios de los segmentos. Encuentra el valor de w.}



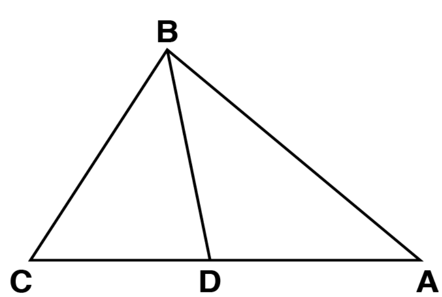
10. En el siguiente triángulo, sea H el ortocentro e I el incentro. Encuentra la medida del ángulo ∡α.



11. En la siguiente figura, encuentra la medida del ángulo ∡ADB. Si los segmentos EB, AD, BD y CB son las bisectrices de los ángulos ∡AEC, ∡EAC, ∡EBC y ∡ACF respectivamente.



12. En el triángulo ABC, ∡ABC = 60° y ∡BAC = 45°. También sabemos que BD es la bisectriz de ∡ABC y BD= $\sqrt{6}$. Calcula la medida de AC.



Sesión 6: Residuos cuadraticos

1. ¿Cuál es el menor entero por el que hay que dividir al número 108675 para que el cociente sea un cuadrado perfecto?

2. ¿Cuántos números de 4 cifras cumplen la propiedad de que el producto de dichas cifras es un cuadrado perfecto?

3. Encuentra la suma de todos los números x menores que 100 tales que $x^2 - 81$ es múltiplo de 100.

4. Demuestra que, si a y b son enteros, entonces $a^2 + b^2$ es divisible por 3, si y sólo si, a y b son divisibles por 3.

5. Demuestra que la suma de los cuadrados de tres números no divisibles por 3 es múltiplo de 3.

6. Demuestra que la diferencia de los cuadrados de dos números no divisibles por 3 es múltiplo de 3.

Nota: En los siguientes problemas, la notación a | b se lee como 'a divide a b' y significa que la división de $\frac{a}{b}$ da como resultado un número entero y deja residuo 0.

7. ¿Para qué valores de a se tiene que $8 \mid a^2 - 1$?

8. Demuestra que si n no es múltiplo de 5, entonces $5 \mid n^4 - 1991$.

9. Demuestra que para todo número n, $n^7 - n$ es divisible por 42.

10. Demuestra que $n^{13} - n$ es divisible por 2, 3, 5, 7, y 13, para todo natural.

11. Demuestra que $13 \mid 2^{70}+3^{70}$.

12. Demuestra que $11 \times 31 \times 61$, divide a $20^{16} - 1$.

13. Demuestra que todos los primos mayores que 3 dejan residuo 1 o 5 al dividirse entre 6.

14. Demuestra que si p es un primo mayor que 7 , entonces $p^6 - 1$ es divisible por 504.

15. Encuentre todos los números primos positivos p tales que $8p^4 - 3003$ también sea un primo positivo.

16. Sean x, y y z números enteros tales que $x^3 + y^3 + z^3$ es múltiplo de 7. Demuestra que uno de esos números es múltiplo de 7.

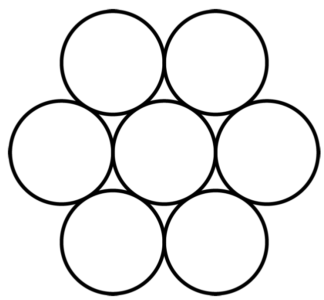
Sesión 7: Permutaciones circulares

1. ¿De cuántas maneras se pueden sentar cuatro amigos a comer en una mesa redonda?

   ¿Y tres?

2. En un grupo de 6 amigos, hay una pareja de novios. ¿De cuántas maneras pueden sentarse alrededor de una fogata, si los novios deben sentarse siempre juntos?

3. El logotipo del nuevo producto de Leo debe de pintarse con 7 colores diferentes, un color por cada circunferencia. Si Leo ya escogió los siete colores, ¿de cuántas maneras se puede pintar su logotipo?

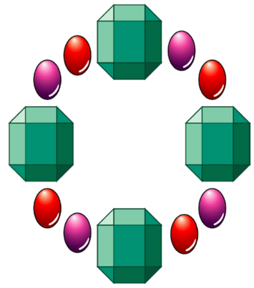


4. Emilia quiere hacer una pulsera con nueve colores diferentes. Dos de esos colores son el amarillo y el naranja. A ella le gusta cómo se ven juntos, así que le gustaría tenerlos siempre juntos en su pulsera. ¿De cuántas maneras puede diseñar su pulsera Emilia?

5. Un joyero muy importante recibió el encargo de la Reina para hacerle un collar con 12 piedras preciosas diferentes.

   a) ¿De cuántas maneras se puede confeccionar el collar?

   b) Después de encargarle ese collar, la reina le encargó uno en el que cada dos piedras diferentes se encuentre una esmeralda, como se muestra en la figura. ¿De cuántas maneras se puede crear el segundo collar?



6. Cinco niños van a bailar tomados de las manos. Pueden acomodarse en uno o en varios círculos y también pueden bailar niños solos. ¿De cuántas maneras pueden acomodarse para bailar?

7. Siete caballeros y el Rey Arturo van a sentarse en la mesa redonda. Sir Galahad y Sir Tristán acaban de tener un duelo y prefieren no sentarse juntos ni uno frente al otro (en puntos diametralmente opuestos en la mesa).

a) ¿De cuántas maneras pueden acomodarse en las sillas?
b) Si además Sir Lancelot quiere sentarse junto al Rey Arturo,

¿Cuántas maneras habrá de ocupar los lugares alrededor de la mesa?

8. Juliana tiene 4 canicas grandes, 7 canicas agüitas y 2 canicas metálicas. ¿Cuántas formas hay de que Emilia acomode sus canicas en un círculo?

9. En la asamblea de un pueblo se van a sentar en un círculo la matrona, el tesorero, tres guerreras, dos guerreros y cuatro niños. ¿De cuántas maneras distintas pueden acomodarse en el círculo si no importa el orden de las personas que sean del mismo grupo? (Es decir, no importa el orden de las guerreras, no importa el orden de los guerreros ni el orden de los niños).

10. En el planeta Amino, el sistema de escritura consiste en palabras circulares, a diferencia de las palabras terrestres que se escriben en líneas. Tienen en Amino siete diferentes letras. ¿Cuántas palabras de 6 letras distintas pueden escribirse en la escritura de Amino?

11. La princesa Nieves vive en un iglú en forma de media esfera. Alrededor va a poner a sus guardias para que protejan su iglú. Le pidió a un oso polar, tres focas y cinco pingüinos que patrullen caminando en círculo. ¿De cuántas maneras pueden acomodarse los guardias alrededor del iglú?

Sesión 8: Sumas telescópicas

1. ¿A cuánto equivale la suma de 30 números múltiplos de 5 a partir de 20?

2. Una cadena de tienda de chocolates decidió instalar una red de cámaras de seguridad de última generación. La instalación se realizó de la siguiente manera: se instalaron 5 cámaras la primera semana, 7 la segunda semana, 9 la tercera y así sucesivamente por 12 semanas.

   a) ¿Cuántas cámaras se instalaron en total?
   b) ¿A las cuántas semanas se instalaron 140 cámaras?

3. Determina la suma de las siguientes sucesiones:

   a) $(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{5}-2)^2+(\sqrt{5}-2)^3+ \dots$

   b) $(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\dots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$

   c) $\frac{1}{1(1+1)}+\frac{1}{2(2+1)}+\frac{1}{3(3+1)}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$

   d) $(\frac{1}{1(11)}+\frac{1}{2(12)}+\frac{1}{3(13)}+\frac{1}{4(14)}+\frac{1}{5(15)}+\dots+\frac{1}{n(10+n)})$

   e) $(1+6^{2^0})(1+6^{2^1})(1+6^{2^2})(1+6^{2^3})\dots(1+6^{2^n})$

   f) $1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+n^2$

   g) $1^3+2^3+3^3+4^3+\dots+n^3$

   h) $7+\frac{7}{3}+\frac{7}{9}+\frac{7}{27}+\dots$

   i) $1\times 1!+2\times 2!+3\times 3!+4\times 4!+\dots+n\times n!$