PRO= MATE

TALLER DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Manual **B 3**

Recrea
Educación para refundar 2040

Educación

Jalisco
GOBIERNO DEL ESTADO

PROMATE - Manual B 3
Taller de resolución de problemas matemáticos para educación básica

Secretaría de Educación del Estado de Jalisco

Juan Carlos Flores Miramontes
Secretario de Educación del Estado de Jalisco

Pedro Diaz Arias
Subsecretario de Educación Básica

Nadia Soto Chávez
Directora General de Programas Estratégicos

Eduardo Moreno Casillas
Director de Articulación de Programas Estratégicos

Cuauhtémoc Cruz Herrera
Director de Ciencias Exactas y Habilidades Mentales

Edita:

Secretaría de Educación, Gobierno de Jalisco
© Dirección General de Programas Estratégicos
Edición: septiembre de 2022

Coordinación de producción:
Cuauhtémoc Cruz Herrera
José Javier Gutiérrez Pineda / Ana Itzel López Romero

Coordinación y diseño editorial:
José Lorenzo Figueroa Cornejo

Apoyos de producción:
Moisés Ríos Fajardo

Impreso en México

Presentación

Juan Carlos
Flores
Miramontes

El Modelo Educativo que compartimos aquí surge como respuesta a la demanda social de contar con una educación de calidad que forme individuos capaces de desenvolverse en cualquier ámbito de la vida, con sensibilidad y responsabilidad social. De aquí nuestra intención de formar estudiantes sensibles a su propio proceso de aprendizaje y al de sus compañeros, a través de conocimientos significativos y relevantes, y de consolidar el enfoque humanista e integral.

Es así como la enseñanza de las matemáticas debe recrearse como un conjunto de conceptos, métodos y técnicas que permitan analizar fenómenos y situaciones cotidianas en diferentes contextos, y así, mediante la interpretación de la información cuantitativa y cualitativa con que se cuente, los estudiantes sean capaces de solucionar las problemáticas que se les presenten día a día.

Buscando responder a esta propuesta, surge el **Taller de Resolución de Problemas Matemáticos, *PROMATE***, como una estrategia que desarrolle habilidades del pensamiento lógico matemático en estudiantes de educación básica.

Esta propuesta se basa en la conceptualización de que el conocimiento no es unidireccional, sino una construcción bidireccional entre el asesor y el estudiante, permitiendo que éste se equivoque y culmine en el proceso de su propio aprendizaje. Asimismo, cuenta con elementos de la propuesta teórico-crítica de las matemáticas y de la propuesta sociológica del mismo nombre, la cual propone cuestionar los métodos y resultados a partir de un aprendizaje dialógico y democrático. En esta metodología se observa el trabajo colaborativo, pero lo más importante es el proceso cognitivo interno de cada estudiante.

Los principios refundacionales a los cuales aporta ***PROMATE,*** dentro del Proyecto "Recrea, Educación para Refundar 2040" son: **La formación de ciudadanía y la mejora de la calidad de los aprendizajes en y para la vida**.

De tal manera, seguiremos avanzando hacia la mejora continua de tu educación, niña, niño, joven, estudiantes de Jalisco; con la gestión transformadora del sistema educativo como parte de las metodologías que se han implementado para la operación del proyecto del que forma parte este manual que tienes en tus manos.

Cómo usar este manual

El presente manual está dirigido a los alumnos que cursan de 1° a 3° grados de secundaria en el estado de Jalisco, quiénes serán capacitados para utilizar herramientas y estrategias adecuadas para la resolución de problemas matemáticos.

Está dividido en 16 sesiones que comprenden cuatro áreas distintas: Teoría de números, Combinatoria, Geometría y Álgebra. Cada sesión contiene una secuencia de problemas ordenados por dificultad y por tipos de estrategias para trabajar, para la cual, la metodología está basada en el trabajo individual, la guía del entrenador y la socialización de las soluciones con el resto del grupo.

Es importante que en la primera mitad de la sesión se trabaje en la resolución de los problemas de forma individual, y si el alumno tiene un entrenador en ese momento, pueda consultar algunos aspectos de su solución, algunas dudas e incluso pedir alguna pista que lo ayude a resolver el problema. La segunda mitad de la sesión, nos permitirá compartir algunas de nuestras estrategias de solución y conocer las realizadas por el resto del grupo, para acrecentar nuestra gama de estrategias a utilizar en la resolución de problemas.

Índice

PROMATE

Indicaciones generales para cada sesión:

Lee con cuidado todos los problemas.

Las preguntas **no son capciosas** y toda la información de cada enunciado es útil.

Puedes intentar cada problema de la manera que tú quieras, **no hay sólo una manera de encontrar la respuesta correcta.**

Si tienes **alguna duda** sobre el enunciado de algún problema, **pregunta** cuanto antes al asesor o asesora a cargo.

Intenta todos los problemas y comparte tus ideas con el asesor o asesora y tus compañeros.

Escribe cada idea y cada paso que vayas recorriendo para tu solución.

1. El 2 de octubre de 1998 fue viernes. ¿Qué día será el 2 de octubre de 2028?

2. En el vivero La Concordia plantaron 70 plantas de citronela en macetas de dos tamaños diferentes. Las macetas pequeñas contienen 6 plantas cada una y las macetas grandes contienen 8 plantas cada una. Si se llenaron más de diez macetas con las plantas, ¿cuántas macetas pequeñas se usaron?

3. Un operador ⌂ actúa en dos números para dar los siguientes resultados:

7⌂2 = 94
3⌂3 = 66
5⌂4 = 98
11⌂9 = 2018

¿A cuánto equivale 4⌂7?

4. Encuentra el número que falta en la posición marcada con una x:

169	**3**
12	**16**

576	**4**
23	**25**

64	**5**
x	**36**

5. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?

a) El número de enunciados falsos aquí es uno.
b) El número de enunciados falsos aquí es dos.
c) El número de enunciados falsos aquí es tres.
d) El número de enunciados falsos aquí es cuatro.
e) El número de enunciados falsos aquí es cinco.

6. Amy, Betty, Cathy, Denny y Eddy están confundidos acerca de qué día de la semana es hoy.

Amy: "Yo sólo sé que ayer no fue viernes."
Betty: "Mañana es martes."
Cathy: "No, hoy es martes."
Denny: "Pasado mañana es martes."
Eddy: "Hoy no es domingo, ni lunes ni martes."

Si sólo uno de ellos tiene la razón, ¿qué día es hoy?

7. Los jueves de cierto mes tienen la mayor cantidad de fechas que son números primos. ¿Qué día de la semana es el 13 de ese mes?

8. Usher, Warren, Xavier, Yolanda y Zane fueron a una tienda de comida asiática en diferentes ocasiones y compraron comida diferente. Usher entró antes que la persona que compró sushi pero salió después que la persona que compró ramen. Xavier es la segunda persona que entró a la tienda y no compró sushi. Yolanda entró antes que Warren. Zane compró un tempura. La última persona que entró, compró kimchi. ¿Quién compró empanadas?

9. Acomoda 2^{18}, 3^{12} y 4^{6} en orden ascendente.

10. Alberto y Bernardo son amigos de Clara, y quieren saber cuándo es su cumpleaños. Clara les dio una lista con 10 fechas posibles:

15 de mayo	16 de mayo	19 de mayo	17 de junio	18 de junio
14 de julio	16 de julio	14 de agosto	15 de agosto	17 de agosto.

Clara les dice después a Alberto el mes y a Bernardo el día de su cumpleaños, de manera que uno no escucha la información que le dijo al otro.

- Alberto: "No sé cuándo es el cumpleaños de Clara, pero yo sé que Bernardo tampoco sabe.

- Bernardo: "Al principio, yo no sabía cuándo era el cumpleaños de Clara, pero ahora ya sé."
- Alberto: "Entonces yo también ya sé cuándo es el cumpleaños de Clara."

¿Cuándo es el cumpleaños de Clara?

11. Hay cuatro pilas de cartas: una con 10 cartas, una con 12 cartas, una con 8 cartas y una con 11 cartas. Cada uno de los cinco jugadores eligen una pila y la dividen en dos pilas más pequeñas. Los jugadores van a tomar turnos en orden. El jugador que no pueda dividir una pila en pilas más pequeñas será el perdedor. Uno de los cinco jugadores siempre perderá el juego, no importa cómo juegan. Encuentra cuál jugador va a perder el juego y explica por qué.

12. En la isla de los nobles y los mentirosos, 50 personas están paradas en una fila. Todas, excepto la primera persona en la fila, dijeron que la persona que está antes en la fila es mentirosa. La primera en la fila dijo que todas las personas detrás de ella eran mentirosas. ¿Cuántas personas mentirosas hay en la fila? Los nobles siempre dicen la verdad y los mentirosos siempre mienten.

13. En un torneo de ajedrez con 6 participantes (A, B, C, D, E y F), cada participante juega con cada uno de los demás participantes exactamente una vez. Hasta ahora, A ha jugado una partida, B ha jugado dos partidas, C ha jugado tres partidas, D ha jugado cuatro partidas y E ha jugado cinco partidas. ¿Cuántas partidas ha jugado F?

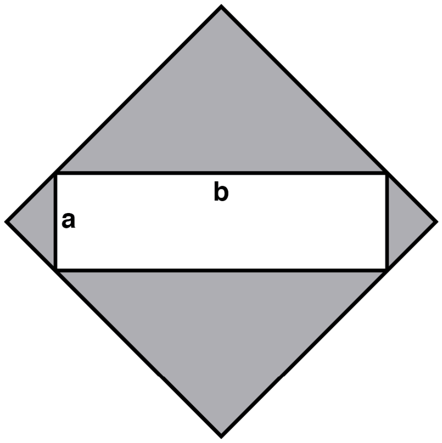
14. ¿Cuál es el número que falta en el siguiente diagrama?

464	
1	7

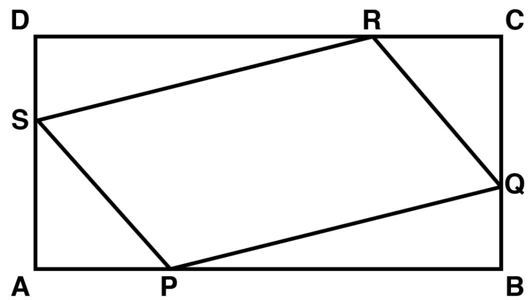
499	
6	2

¿?	
5	1

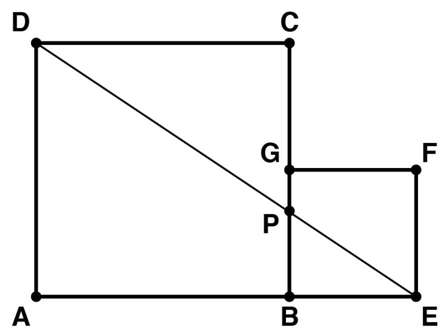
1. En la siguiente figura, el cuadrado exterior tiene lados que miden 12 cm y los lados del rectángulo interior cumplen que a x b = 13 . Determina el valor del área sombreada.



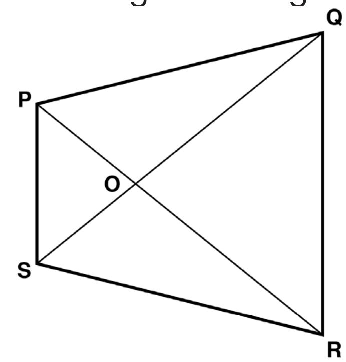
2. Los puntos P, Q, R y S dividen a los lados del rectángulo ABCD en razón 1 : 2 como indica la figura. Si el área del cuadrilátero ABCD es 2016, ¿cuánto mide el área del paralelogramo PQRS?



3. En la figura ABCD es un cuadrado de lado 2 y BEFG es un cuadrado de lado 1. El punto P es la intersección de DE con BG. ¿Cuánto mide GP?



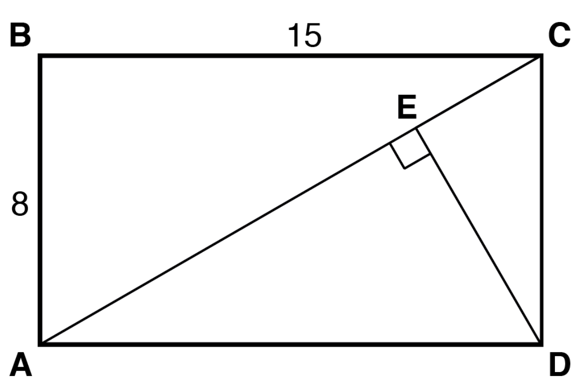
4. En el siguiente cuadrilátero PQRS, el punto O es la intersección de sus diagonales. Además, sabemos lo siguiente: PS es paralela a QR, PO = OS y OQ = OR. ¿Cuántos pares de triángulos congruentes hay en la figura?



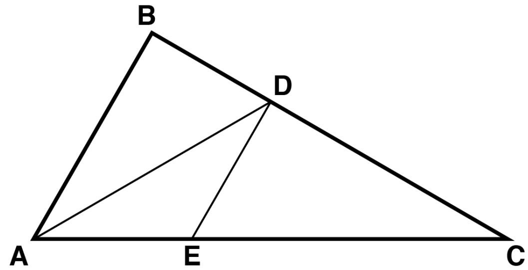
5. Sea ABC un triángulo rectángulo con $\measuredangle ABC = 90°$. Sea D un punto sobre AC de tal manera que BD es una línea que pasa por B y perpendicular a AC. Si AB=8, AC=10 y BC=6, encuentra el área del triángulo BDC.

6. Petra quiere armar un tetraedro así que hace lo siguiente: Toma un triángulo acutángulo (un triángulo en el que todos sus ángulos son menores que 90°) y lo nombra ABC. Después marca los puntos P, Q, y R de tal manera que sean los puntos medios de los lados AB, BC y AC respectivamente. Después dobla el triángulo por las líneas PQ, QR y PR y une los pedazos de papel con cinta para formar un tetraedro. Si el perímetro de ABC es de 42, ¿cuánto mide la suma de las medidas de las aristas del tetraedro de Petra?

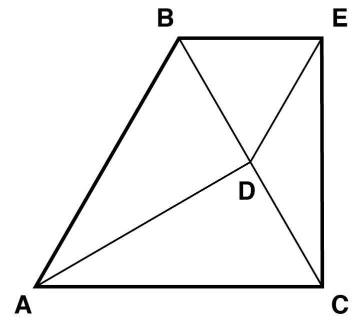
7. En la siguiente figura, encuentra la medida del segmento AE.



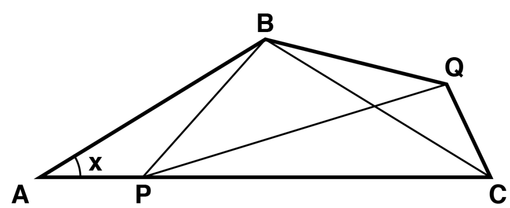
8. En la siguiente figura, $\measuredangle BAD = \measuredangle DCE = 28°$, $AB = DC$ y $AD = EC$. ¿Cuánto vale el ángulo $\measuredangle ADE$?



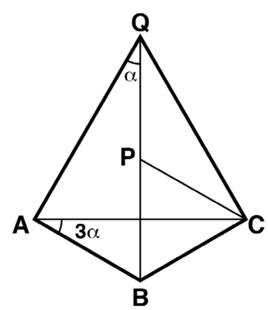
9. En la figura, los triángulos ABC y DBE son equiláteros. Encuentra el valor de $\frac{AD}{EC}$.



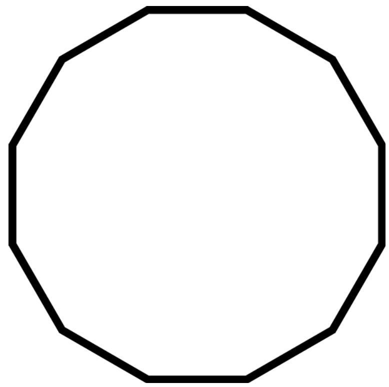
10. En la siguiente figura, $AB = BC$, $PB = BQ$ y $AP = CQ$. Si $\measuredangle PCQ = 80°$, halla el valor de x.



11. En la figura, los triángulos AQC y BPC son equiláteros. Halla el valor de α.



1. El diagrama siguiente muestra un dodecágono (polígono de 12 lados). ¿Cuántas diagonales distintas se pueden trazar?

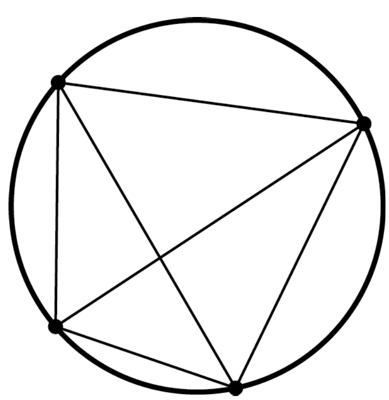


2. ¿Y para un polígono de n lados?

3. En una circunferencia se marcan 8 puntos. Muestra por qué el número de triángulos que se pueden formar con vértices en esos puntos es igual al número de pentágonos que se pueden formar.

4. Un granjero quiere plantar 10 árboles en 5 filas de tal manera que haya exactamente 4 árboles en cada fila. Dibuja un diagrama para mostrar de qué manera se plantaron los árboles.

5. La figura muestra un círculo con cuatro puntos. Cada punto está unido con los demás puntos por una línea (llamada cuerda). Las cuerdas dividen al círculo en 8 regiones diferentes. Encuentra el máximo número de regiones que pueden ser formadas por un círculo con 6 puntos.



6. Un cuadrado podría intersecar a un triángulo en la siguiente cantidad de puntos:

i. 3 puntos
ii. 4 puntos
iii. 5 puntos

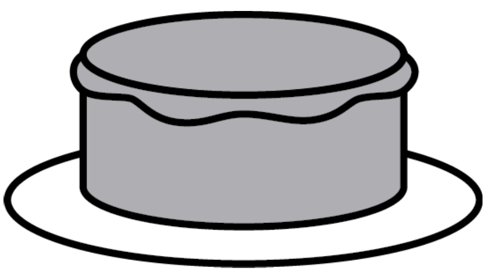
¿Cuál de los siguientes enunciados es cierto?

a) Sólo el inciso i.
b) Sólo el inciso ii.
c) los incisos i y ii.
d) los incisos ii y iii.
e) los incisos i, ii y iii.

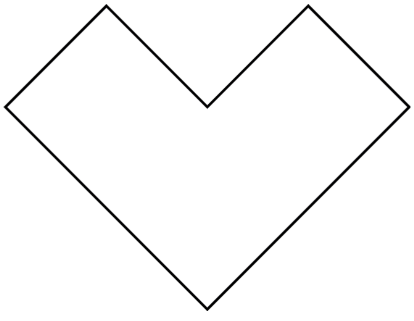
7. Se marcan diez puntos en una hoja de papel, de manera que cualesquiera tres de ellos no están sobre la misma línea. ¿Cuántos triángulos con vértices en estos puntos se pueden dibujar?

8. Un círculo y un rombo se dibujan en una superficie plana. ¿Cuál es el mayor número de regiones que se pueden formar en la superficie?

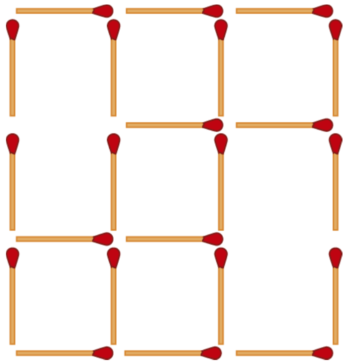
9. ¿Cuál es el máximo número de partes pueden ser obtenidas al cortar un pastel circular con tres cortes rectos en cualquier dirección?



10. Divide la figura de abajo en cuatro partes iguales.



11. La figura siguiente está hecha con cerillos idénticos. Encuentra la cantidad total de cuadrados formados con los cerillos en la figura.

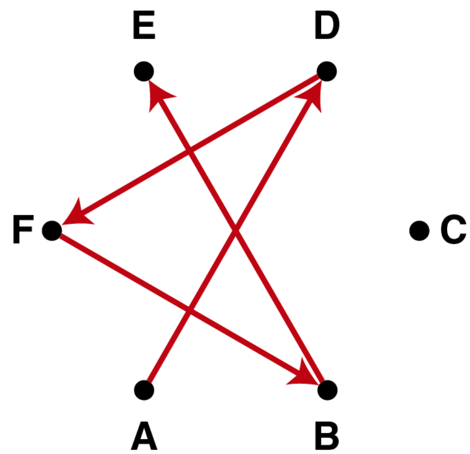


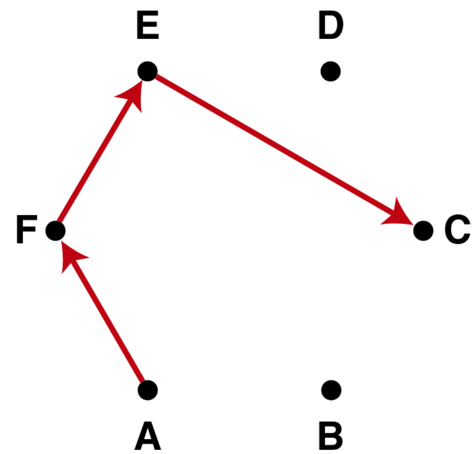
12. Cinco amigos salen de vacaciones al mismo tiempo y a diferentes lugares. Deciden que al llegar a su destino cada uno de ellos enviará una postal a tres de los restantes. ¿Es posible que cada amigo reciba postales de precisamente los tres amigos a los que él les envió las suyas?

13. Frida Kahlo y Diego Rivera dan una fiesta en su casa e invitan a otras 4 parejas. Al llegar, cada persona abraza a todas las otras que conoce, aunque nadie abraza a su pareja y nadie abraza más de una vez a otra persona. Al final de la fiesta, Frida pregunta a Diego y a cada uno de sus ocho invitados cuántos abrazos ha dado y obtiene nueve respuestas diferentes. Si Frida y Diego ya estaban en la casa antes de que llegaran las demás parejas, ¿a cuántas personas abrazó Frida?

14. Un grupo de 7 personas acuerdan cenar juntas en diferentes ocasiones. En cada ocasión se sientan alrededor de una mesa redonda de modo que cada persona tiene a sus dos lados comensales distintos en cenas diferentes. Si todos quieren sentarse junto a todos los demás, ¿Cuál es la mínima cantidad de días que deberán citarse para cenar?

15. Uno de los aspectos más importantes para un teléfono celular es contar con una clave para que sólo el usuario pueda desbloquear su teléfono. Imitando un poco el aspecto más popular, se ha decidido implementar un bloqueo de patrón, en una figura de seis puntos como la de que se muestra, cada punto con una letra de la A a la F. La manera en la que funciona un patrón de bloqueo es que se tienen que unir al menos cuatro puntos de los de la figura con segmentos de línea, de tal forma que el inicio del siguiente segmento sea el final del segmento anterior; y de tal forma que hay un punto inicial y otro final, distintos entre sí. Cada punto puede ser utilizado a lo más una sola vez. Estos son ejemplos de patrones válidos:





¿Cuántos patrones de bloqueo válidos distintos se pueden formar? Justifica tu respuesta.

Para un patrón de bloqueo, lo que nos interesa es el orden en el que se forma la línea. De esta manera, se cuentan como distintos los patrones A-F-E-C y C-E-F-A, aunque al final formen la misma figura. También se consideran diferentes los patrones que se obtienen de girar o voltear otros patrones.

1. Astrid dividió un número a entre 10 y le quedó 5 como residuo. Beatriz dividió un número b entre 10 y le quedó como residuo 4. Cristy calculó el triple de la suma de los números de Astrid y Beatriz y dividió el resultado entre 10. ¿Cuál es el residuo que obtuvo Cristy al final?

2. Encuentra el último dígito de 2017^{2017}.

3. Un número entero deja el mismo residuo cuando lo dividimos entre 7, entre 9 o entre 11. Si este número tiene tres dígitos, ¿cuál es el mayor valor que puede tener?

4. ¿Cuáles son los últimos 5 dígitos del número $1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{111\ldots111}_{2014\text{ veces}}$?

5. ¿Cuáles de los siguientes números es siempre un número impar para cualquier número entero?

a) $13A$
b) $13 + 13A$
c) $13 + A^{13}$
d) $13 + 2A$
e) $13 + 23A$

6. Encuentra la suma de los dígitos del producto $\underbrace{111\ldots111}_{2016\text{ veces}} \times 2016$.

7. Encuentra el último dígito de la suma $1^{2016} + 2^{2016} + 3^{2016} + \ldots + 2016^{2016}$.

8. Del conjunto A = {1, 2, 3, ..., 2019} se va a formar un conjunto B con 2018 elementos tal que la suma de todos los elementos de B sea múltiplo de 3.

a) ¿De cuántas maneras se puede hacer la elección de los elementos de B?
b) ¿Y si B tuviera 2017 elementos?
c) ¿Y si formamos a B con 2016 elementos?

Nota: En un conjunto, el orden de los elementos no es importante.

9. Si p es un número primo, entonces ¿cuál de las siguientes no siempre son verdaderas?

a) El número 2p es un número par.
b) El número p es impar.
c) El número $2p + 3$ es impar.
d) El número p^2 no es un número primo.
e) El número p^5 tiene 6 divisores.
f) El número $3p + p$ no es un número primo.
g) El número $p + 1$ es un número par.
h) El número $p + 1$ es un número compuesto.
i) El número $p^2 + 1$ es par.

10. Encuentra los últimos cinco dígitos de 15^{2015}.

11. De las siguientes afirmaciones, sólo dos son verdaderas. ¿Cuánto vale *A*?

a) $A + 41$ es un cuadrado perfecto.
b) El último dígito de *A* es 1.
c) $A - 48$ es un cuadrado perfecto.

12. Encuentra el entero más chico, tal que al dividirlo entre 3 queda residuo 1, al dividirlo entre 5 queda residuo 2 y al dividirlo entre 7 queda residuo 3.

13. ¿Cuál es el último dígito del producto $3^{2019} \times 7^{2021}$?

14. Sea n un entero. ¿Cuál de los siguientes siempre es un múltiplo de 6?

a) $n + 6$
b) $n^2 - n$
c) $n^2 - n$
d) $n^3 - n$
e) $n^3 - n^2$

15. ¿Cuál es el quinto dígito de derecha a izquierda en el número que resulta de multiplicar 77777 y 99999?

1. Una colección de monedas antiguas de 5 y 10 pesos, suman 85 pesos. Si hay 12 monedas en total, ¿cuántas monedas de 10 pesos hay?

2. Si la mitad del perímetro de un triángulo equilátero con lados x es igual al triple del perímetro de un cuadrado con lados s, ¿a qué equivale x en términos de s?

3. En un parque de diversiones 6 entradas de adulto y 8 de niño cuestan 880 pesos, y 4 entradas de adulto y 5 de niño, 570 pesos, ¿cuál es el precio de entrada por un adulto y por un niño?

4. Si $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$ y $\frac{y}{z}=\frac{2}{7}$, entonces ¿a qué equivale $\frac{z}{x}$?

5. Sea x un número tal que $x+\frac{1}{x}=5$, encuentra el valor de $x^3+\frac{1}{x^3}$.

6. Encuentra la siguiente suma: $a \times 1 + \overline{aa} \times 2 + \overline{aaa} \times 3 + \overline{aaaa} \times 4$.
Nota: La línea horizontal sobre a, implica que es a está cumpliendo como dígito, no variable.

7. Dado que X es un entero tal que $-4 \leq X \leq 3$ y Y es un número primo. Encuentra el mayor valor posible de $X^2 - Y^2$.

8. Encuentra todos los valores posibles de $\frac{x}{y}$ dado que $21x^2 - 10xy + y^2 = 0$ y $y \neq 0$.

9. Si a y b son números distintos que cumplen que $a^2 + b^2 = 4ab$, ¿cuál es el valor de $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$?

10. Encuentra los valores de x y y en la siguiente ecuación: $|x-7|+\sqrt{y+8}=0$.

11. Si x y y son enteros positivos, encuentra los valores que satisfagan la siguiente ecuación: $x^2 - 9y^2 = 43$.

12. Dado que $xy - x - y = 403$, donde x y y son números impares enteros, calcula el valor de $x + y$.

13. Dado que $x^2 - 7x + 1 = 0$, encuentra el valor de $x^4+\frac{1}{x^4}$.

14. Si a, b y $\frac{2017}{ab}$ son enteros, ¿cuántos valores posibles de $a - b$ hay?

1. De 200 estudiantes 50 toman el curso de química, 140 el curso de matemáticas y 24 ambos. La noche del viernes se celebrará una fiesta, pero como ambos cursos programaron exámenes para el día siguiente, sólo los estudiantes que no estén en ninguno de estos cursos podrán ir a la fiesta de la noche. ¿Cuántos estudiantes irán a la fiesta?

2. Lulú va a contar del 1 al 100 mencionando solamente los números que sean múltiplos de 2 o de 3. ¿Cuántos números va a decir Lulú?

3. Un grupo ecologista va a sembrar árboles en la avenida principal de una ciudad. Comienzan en el principio de la avenida y después siembran un árbol cada 6 metros. Al siguiente año, el mismo grupo hizo el mismo proceso, pero poniendo árboles cada 14 metros, donde no hubiera un árbol ya sembrado. Si la avenida mide 5723 metros, ¿cuántos árboles sembraron el segundo año?

4. Cuando Carla abrió su libro de inglés que está numerado por hoja, se dio cuenta de que su hermanito le había arrancado varias páginas. El hermanito de Carla arrancó todas las hojas que tuvieran un 7 en el número de hoja y todas las hojas cuyo número es múltiplo de 3. El libro tenía 324 hojas. ¿Cuántas tiene ahora?

5. Tres grupos de artistas van a pintar murales en las casas de un pueblo. Los Hijos de Siqueiros van a pintar murales en todas las casas que tengan número de casa múltiplo de 5. Los Rufinos van a pintar en todas las casas que tengan número de casa múltiplo de 7. Los Orozquitos van a pintar en las casas que tengan número múltiplo de 11. Si hay una casa que deban pintar dos o más grupos, entonces van a colaborar en un mural conjunto. El pueblo tiene 1280 casas. ¿Cuántas casas van a quedar pintadas con murales?

6. El maestro César va a aplicar un examen sorpresa a algunos estudiantes de su grupo de 87 alumnos. Van a presentar el examen los que tengan número de lista múltiplo de 4, de 6 o de 14. ¿Cuántos alumnos se salvan de presentar el examen sorpresa?

7. ¿Cuántos números hay del 50 al 1200, excluyendo los múltiplos de 3 y de 5?

8. Se quiere crear un número con los siguientes dígitos: 4, 5, 6, 7, 9. ¿De cuántas maneras se puede crear un número de cuatro dígitos en el que el 4 nunca esté junto al 5?

9. Una baraja inglesa está formada por cuatro palos (picas, corazones, diamantes y tréboles) y cada palo está formado por trece cartas (con números del 2 al 10 y las cartas A, J, Q, K) se quiere repartir una mano de 5 cartas.

a) ¿Cuántas manos de 5 cartas sin ninguna carta de tréboles se pueden repartir?
b) ¿Cuántas manos de 5 cartas existen en donde haya por lo menos una carta de tréboles?

10. ¿Cuántas palabras de 12 letras se pueden crear y que tengan al menos una vez las letras P, A, T, Y?

Nota: Las palabras pueden o no tener sentido. Considera 27 letras.

11. El ajedrez es un juego de dos jugadores, cada jugador posee 16 piezas, de estas piezas 8 son peones, 2 torres, 2 caballos, 2 alfiles , 1 reina y 1 rey. De un tablero de ajedrez, voy a escoger diez piezas. Si, de entre estas, debo escoger al menos un peón y una torre de cualquier color, ¿de cuántas maneras puedo hacer esta elección?

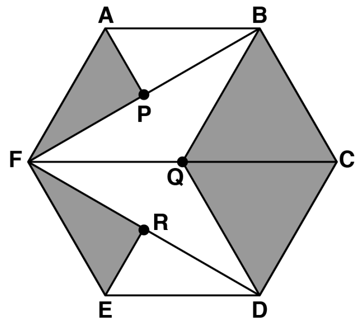
12. En los exámenes finales de una escuela:

- Al menos el 70% aprueban Física.
- Al menos el 90% de los alumnos aprueban las Matemáticas.
- Al menos el 75% aprueban la Filosofía.
- Al menos el 85% aprueban el Inglés.

¿Cuántos alumnos, al menos, aprueban esas cuatro asignaturas?

13. ¿Cuántos números de 7 cifras tienen, al menos, una vez los dígitos 3, 6 y 9?

1. El siguiente es un hexágono cuya área es π . P, Q y R son los puntos medios de FB, FC y FD, respectivamente. ¿Cuál es el valor del área sombreada?

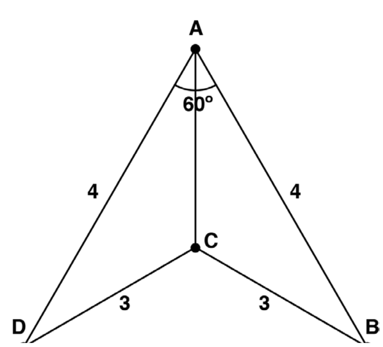


2. Demuestra que las tres medianas de un triángulo lo dividen en seis triángulos equivalentes (con misma área).

3. Sea ABC un triángulo acutángulo (un triángulo cuyos ángulos son todos menores que 90°). Se construye el ortocentro de manera que D sea el pie de altura (un pie de altura es el punto en el cual cruzan la altura de un triángulo con el lado opuesto) desde C, E es el pie de altura desde A, F el pie de altura desde B y H el ortocentro. Además, sabemos que BF = 8, FC = 6 y el perímetro de AHF = 9. Encuentra la medida del lado AH.

4. En un triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas desde A, B, y C y se nombran AP, BQ y CR, respectivamente. Los triángulos formados por los pies de altura de un triángulo se le llama triángulo órtico. El triángulo PQR es el triángulo órtico de ABC. Demuestra que los triángulos rectángulos no tienen triángulos órticos. Explica por qué pasa así, a través de propiedades matemáticas.

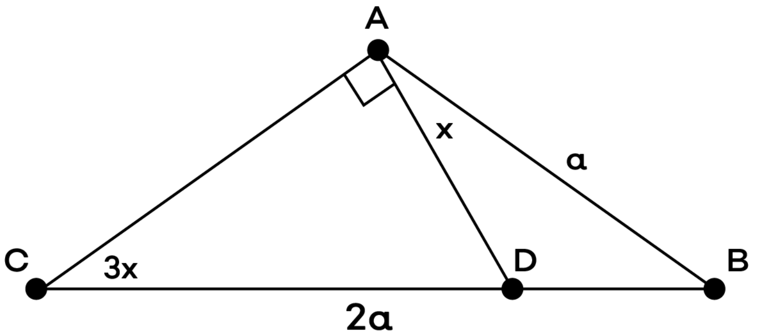
5. En la siguiente figura, encuentra el valor de AC.



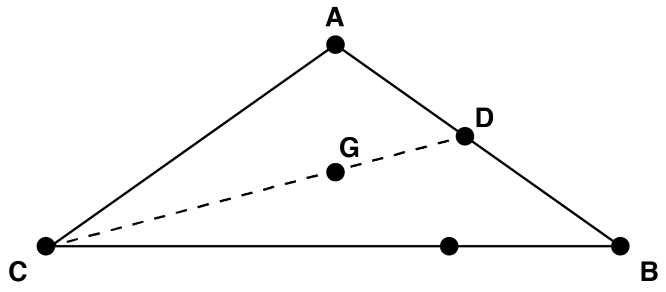
6. En un triángulo rectángulo se conoce que el perímetro es P = 96 y la altura es 96/5 . Determina la longitud de los lados del triángulo.

7. Sea AD la altura de un triángulo ABC y H el ortocentro de dicho triángulo. Demuestra que BD x DC = AD x DH.

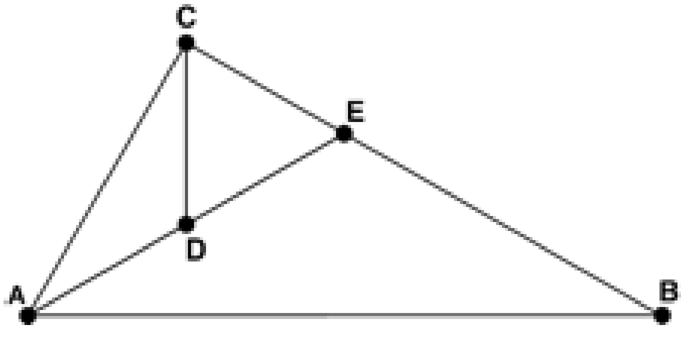
8. En el siguiente triángulo ABC encuentre el valor del ángulo x.



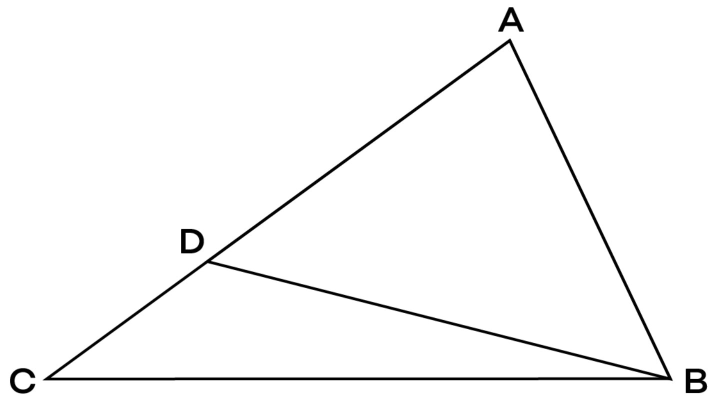
9. En el triángulo ABC se traza la mediana CD de 28 cm. Si G es el baricentro, ¿cuánto mide GD?



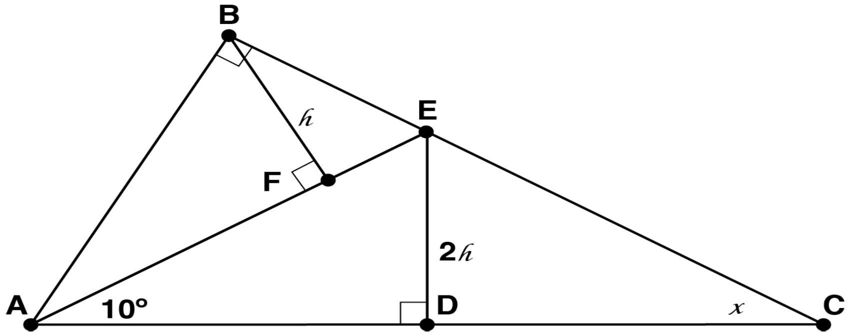
10. En la siguiente figura CD es la mediana del triángulo ACE y se conoce la siguiente relación 2BE = 5CE. Encuentre la relación entre el área del triángulo ACD y el área del triángulo ABC.



11. En el triángulo ABC tenemos que AB = AD y ∠ABC − ∠ACB = 45°. ¿Cuál es la medida de ∠CBD?



12. En el triángulo rectángulo ABC se trazan los segmentos AE, ED y BF. El segmento ED mide 2h y el segmento BF mide h. Encuentre el valor del ángulo x.



1. Guillermo, Ana y Paty fueron juntos a la tienda de refrescos. Guillermo compró 36 refrescos de uva, Ana compró 132 aguas minerales y Paty compró 48 refrescos de naranja. Un agua mineral es dos veces más pequeña que un refresco de uva o uno de naranja. Es decir, donde cabe un refresco de uva o uno de naranja caben dos aguas minerales. En la tienda hay cajas de diferentes tamaños para llevar sus refrescos. Cada quien se va a ir a su casa con sus refrescos en cajas y no quieren que sobre espacio en las cajas porque se baten los refrescos. Solamente pueden pedir un tamaño de caja para los tres. ¿Cuántos refrescos deberán caber en cada caja para que todos lleven la menor cantidad de cajas?

2. ¿Cuál es el número n más pequeño de tal manera que el producto siguiente es cuadrado perfecto?

$$(2^2 - 1)(3^2 - 1)(4^2 - 1)(5^2 - 1)(6^2 - 1) \dots (n^2 - 1)$$

3. El máximo común divisor de dos números p y q es 42 y su mínimo común múltiplo es 13860. Encuentra todas las parejas posibles de (p, q) sabiendo que p es menor que q.

4. Escribe $2^5 + 2^5$ como potencia de 2.

5. ¿Cuántas cifras tiene el número $2^{234}(5^{237})$?

6. Un juego de casillas está numerado con los cuadrados de los enteros positivos. La primera casilla es 1, la segunda 4, la siguiente 9 y así sucesivamente. En el juego hay una casilla con el número 10^8. ¿Qué número está en la siguiente casilla?

7. Si $4^x - 4^{x-1} = 24$ ¿Cuál es el valor de $(2x)^x$?

8. ¿Qué número es mayor $2^{2018}(5^{2019})$ o $2^{2020}(5^{2018})$?

9. ¿Cuántos divisores múltiplos de 6 tiene 720?

10. Se tiene la operación $2^2 + 2^5 + 2^j$ ¿Para qué valor de j la operación es un cuadrado perfecto?

11. En un tablero las casillas están numeradas usando el sistema numérico en base 7. Al final del juego, el jugador cuenta las fichas que tiene en números primos y añade 7 puntos extras por cada ficha. Miguel tenía fichas en las siguientes casillas:

$$13_7, 31_7, 61_7, 25_7$$

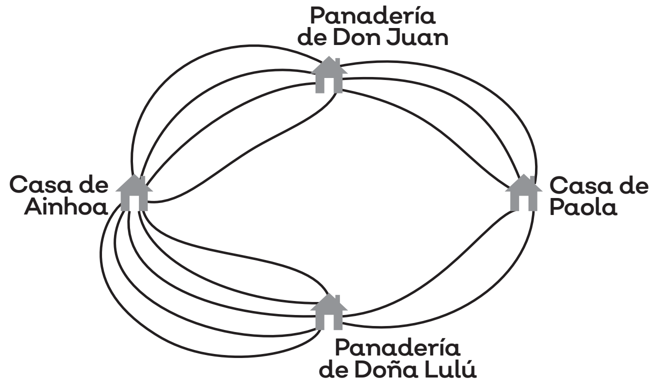
¿Cuántos puntos extras tendrá al final?

12. Si $N = 15 \times 30^n$ y sabemos que N tiene 294 divisores, encuentra n.

13. ¿Cuántos ceros debe tener W = (2000...00), para que tenga 56 divisores?

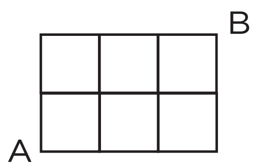
14. ¿Cuánto suman los divisores de 1800?

1. Ainhoa quiere ir a la casa de Paola pero primero debe de ir a la panadería de Don Juan a comprarle una concha. De casa de Ainhoa a la panadería llevan 4 caminos y de la panadería a casa de Paola llevan 3. ¿De cuántas maneras puede hacer Ainhoa el viaje?

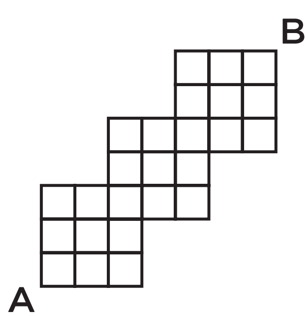


2. En el problema anterior, consideremos que Ainhoa también podría pasar por la panadería de Doña Lulú antes de ir a casa de Paola como se muestra en la figura. Si hay 5 caminos que llevan desde la Casa de Ainhoa a la panadería de Doña Lulú y dos caminos de la Panadería de Doña Lulú a casa de Paola ¿de cuántas maneras se puede ir de casa de Ainhoa a casa de Paola pasando por una de las dos panaderías?

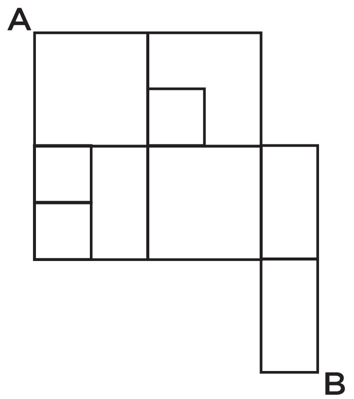
3. El campesino Chuy debe de llevar a su oveja del punto A al punto B. Si sólo puede moverse hacia arriba o hacia la derecha sobre las líneas de la cuadricula, ¿de cuántas maneras puede hacerlo?



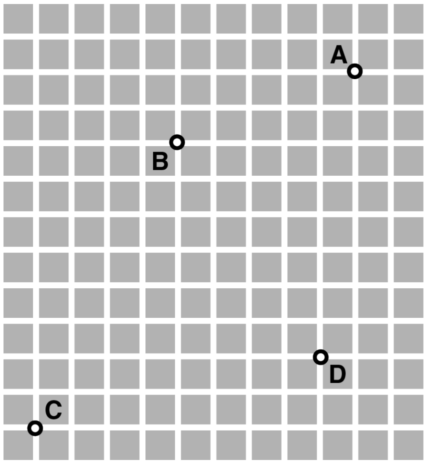
4. En la siguiente figura sólo se puede avanzar hacia arriba y hacia la derecha. Calcula la cantidad de maneras que hay de ir del punto A al punto B.



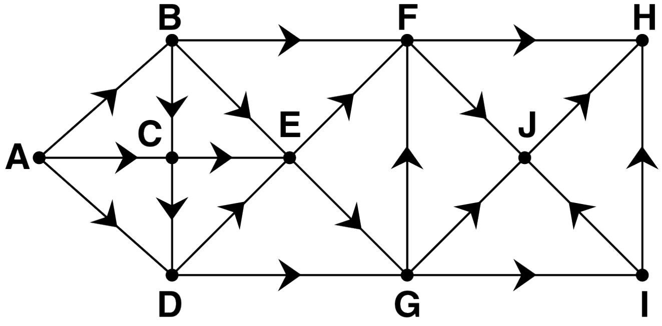
5. Encuentra la cantidad de caminos posibles desde el punto A hasta el punto B viajando sólo hacia la derecha y abajo siguiendo las líneas de las figuras.



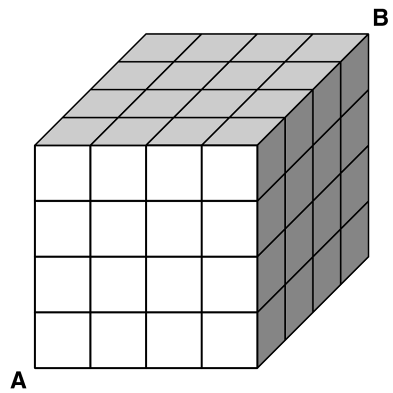
6. La siguiente ilustración es un mapa de una ciudad, donde se marcaron sitios importantes con letras. Los cuadrados representan manzanas y las líneas blancas representan cuadras. ¿De cuántas maneras se puede ir del punto A al punto C, pasando por el punto B si sólo se puede ir hacia abajo y hacia la izquierda?



7. ¿De cuántas maneras se puede ir de A a H viajando sobre las líneas si se deben de seguir los sentidos que marcan las flechas?



8. La siguiente figura es un cubo de lado 4. ¿De cuántas maneras se puede llegar del punto A al punto B sobre las líneas si sólo se puede ir hacia la derecha, hacia arriba y hacia atrás?

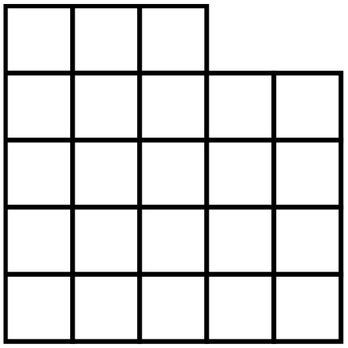


9. ¿Cuántos rectángulos diferentes se pueden trazar en una cuadrícula de 6x6, de tal manera que los vértices del cuadrado coincidan con los vértices de la cuadrícula?

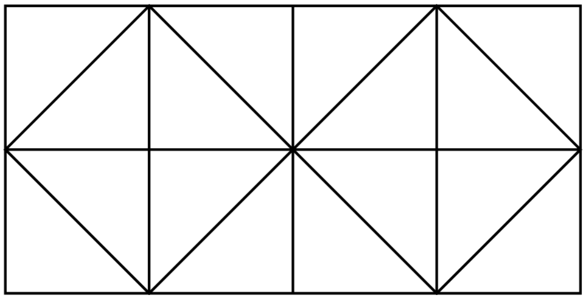
Nota: Un cuadrado también es un rectángulo.

10. ¿Cuántos cuadrados se pueden trazar con vértices en la figura de la derecha?

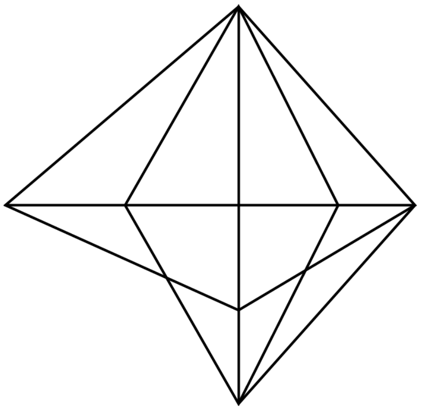
Nota: La figura está construida con cuadrados iguales.



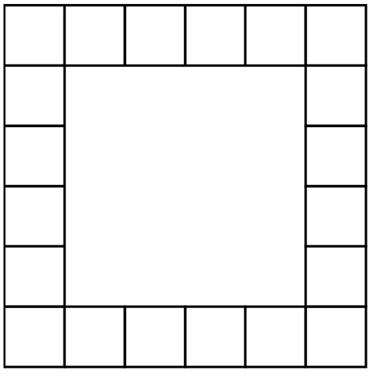
11. ¿Cuántos triángulos hay en el siguiente diagrama?



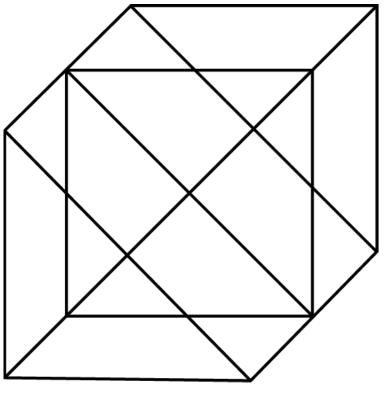
12. ¿Cuántos triángulos hay en la figura?



13. ¿Cuántos rectángulos hay en la siguiente figura?

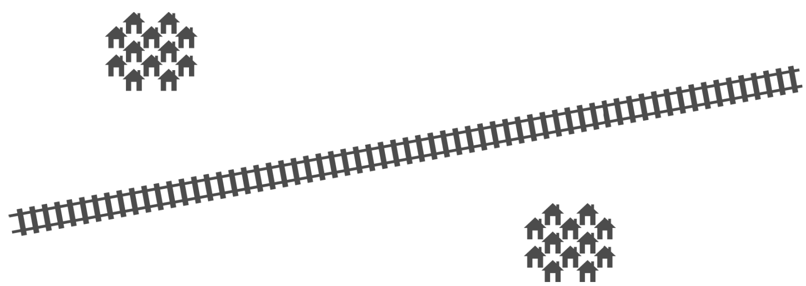


14. ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?

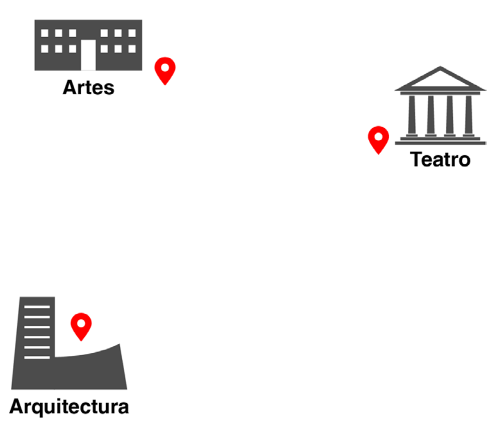


1. Dado un triángulo ABC, encuentra un punto X sobre AB y uno Y sobre AC de modo que XY = BX + CY, siendo XY paralela a BC. Al resolver este problema, asegúrate de indicar los pasos que seguiste para hacerlo y por qué.

2. Se quiere construir una vía del tren entre los pueblos de Techaluta de Montenegro y San Andrés Ixtlán. ¿Dónde puede estar la estación de tal manera que esté a igual distancia de ambos pueblos y esté sobre la vía del tren? Explica los pasos que seguiste para trazar la ubicación de la estación del tren.

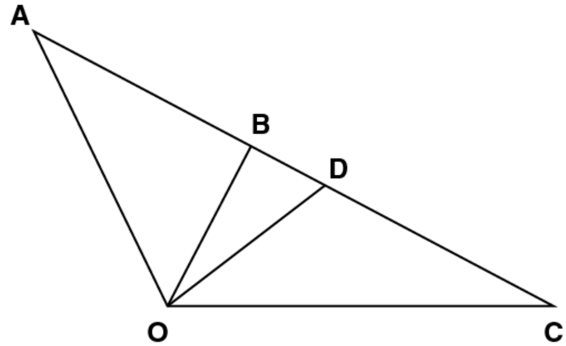


3. Paty vende dulces en su universidad. Ella le vende a los estudiantes de la facultad de artes plásticas a los de la facultad de teatro y a los estudiantes de arquitectura. Los edificios de cada facultad están en diferentes puntos de la universidad como se muestra en la figura. Paty quiere encontrar un punto para vender sus dulces de tal manera que los estudiantes de las tres facultades deban de caminar exactamente la misma distancia para llegar a su puesto. ¿Dónde debe de poner su puesto de dulces Paty? Justifica tu respuesta y traza el punto.

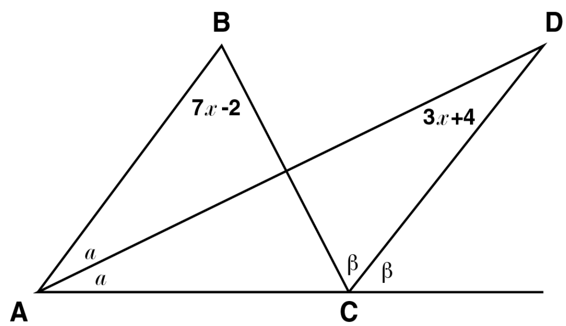


4. Dado un triángulo de lados 36, 54 y 70 se traza la bisectriz del ángulo opuesto al lado mayor. Encuentra la diferencia entre los segmentos que se forman sobre dicho lado.

5. En el siguiente triángulo AOC, sabemos que la diferencia entre los ángulos ∡AOD - ∡DOC = 30°. También sabemos que el segmento OB es la bisectriz del ángulo ∡AOC. Encuentra la medida del ángulo ∡BOD.

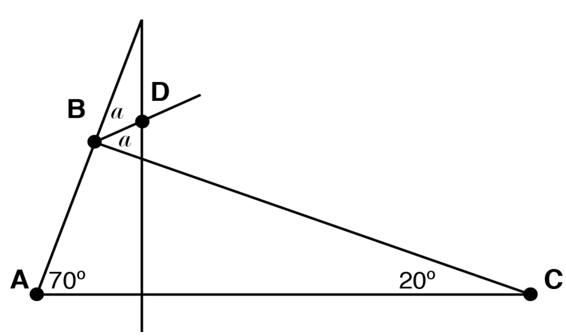


6. Dada la siguiente figura, calcula el valor de los ángulos ∡ABC y ∡ADC.

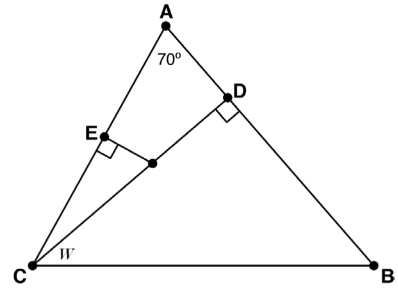


7. En un triángulo ABC el ángulo ∡CBA es 40° mayor que el ángulo ∡BAC. Si se traza la bisectriz del ángulo ∡BCA y la mediatriz de AB ¿Cuál es el valor del ángulo formado por la bisectriz y la mediatriz?

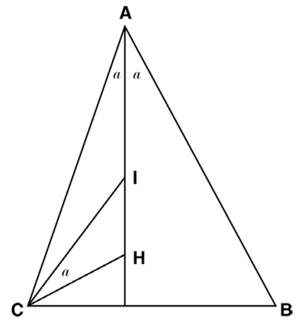
8. En un triángulo ABC se traza la mediatriz de AC y la bisectriz exterior BD (segmento que divide al ángulo exterior en dos ángulos iguales). Si ∡BAC=70° y ∡BCA=20°. ¿Cuál es el valor del ángulo formado por la bisectriz y la mediatriz?



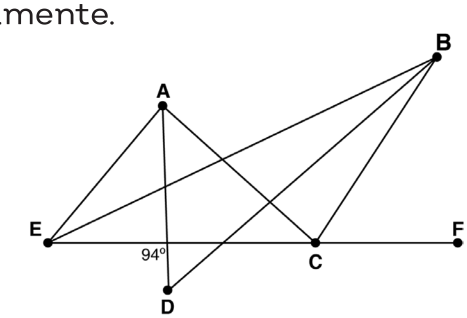
9. En el triángulo ABC de la figura los puntos D y E son los puntos medios de los segmentos. Encuentra el valor de w.



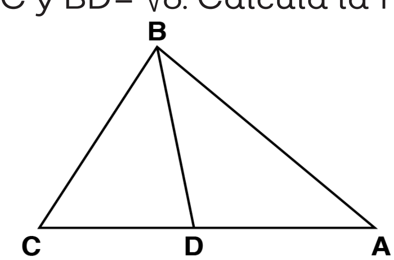
10. En el siguiente triángulo, sea H el ortocentro e I el incentro. Encuentra la medida del ángulo ∡α.



11. En la siguiente figura, encuentra la medida del ángulo ∡ADB. Si los segmentos EB, AD, BD y CB son las bisectrices de los ángulos ∡AEC, ∡EAC, ∡EBD y ∡ACF respectivamente.



12. En el triángulo ABC, ∡ABC = 60° y ∡BAC = 45°. También sabemos que BD es la bisectriz de ∡ABC y BD= $\sqrt{6}$. Calcula la medida de AC.



1. ¿Cuál es el menor entero por el que hay que dividir al número 108675 para que el cociente sea un cuadrado perfecto?

2. ¿Cuántos números de 4 cifras cumplen la propiedad de que el producto de dichas cifras es un cuadrado perfecto?

3. Encuentra la suma de todos los números x menores que 100 tales que $x^2 - 81$ es múltiplo de 100.

4. Demuestra que, si a y b son enteros, entonces $a^2 + b^2$ es divisible por 3, si y sólo si, a y b son divisibles por 3.

5. Demuestra que la suma de los cuadrados de tres números no divisibles por 3 es múltiplo de 3.

6. Demuestra que la diferencia de los cuadrados de dos números no divisibles por 3 es múltiplo de 3.

Nota: En los siguientes problemas, la notación a | b se lee como 'a divide a b' y significa que la división de $\frac{a}{b}$ da como resultado un número entero y deja residuo 0.

7. ¿Para qué valores de a se tiene que $8 \mid a^2 - 1$?

8. Demuestra que si n no es múltiplo de 5, entonces $5 \mid n^4 - 1991$.

9. Demuestra que para todo número n, $n^7 - n$ es divisible por 42.

10. Demuestra que $n^{13} - n$ es divisible por 2, 3, 5, 7, y 13, para todo natural.

11. Demuestra que $13 \mid 2^{70}+3^{70}$.

12. Demuestra que $11 \times 31 \times 61$, divide a $20^{16} - 1$.

13. Demuestra que todos los primos mayores que 3 dejan residuo 1 o 5 al dividirse entre 6.

14. Demuestra que si p es un primo mayor que 7, entonces $p^6 - 1$ es divisible por 504.

15. Encuentre todos los números primos positivos p tales que $8p^4 - 3003$ también sea un primo positivo.

16. Sean x, y y z números enteros tales que $x^3 + y^3 + z^3$ es múltiplo de 7. Demuestra que uno de esos números es múltiplo de 7.

1. En una bolsa hay diez bolas iguales, numeradas del 0 al 9 cada una. Voy a sacar dos bolas al azar, las cuales generarán un número de dos cifras dependiendo del orden en el que se sacaron. ¿Cuál es la probabilidad de que se saquen dos bolas al azar que juntas formen un número mayor que 59?

2. Se van a rifar tres teles gigantes en una posada. Todos los boletos tienen tres cifras, del 000 al 999. Calcula la probabilidad de que sucedan los siguientes eventos:

a) El primer boleto premiado termine en 5
b) El segundo boleto premiado también termine en 5
c) El tercer boleto premiado también termine en 5

3. Las calificaciones de un grupo de prepa muestran que la probabilidad de aprobar Matemáticas es 0.6 y la de aprobar Economía 0.7. Además, la probabilidad de aprobar las dos asignaturas es 0.45. Si en ese grupo se elige un alumno al azar, alcula la probabilidad de que suceda lo siguiente:

a) Apruebe alguna de las dos asignaturas?
b) Apruebe solamente una de las dos asignaturas?
c) No apruebe ninguna de las dos asignaturas?

4. Ana y Paty son jugadoras de baloncesto. Ana encesta 2 de cada 5 tiros; Paty 3 de cada 7. Si ambas tiran a canasta una sola vez. Calcula la probabilidad de los siguientes eventos:

a) Ambas han encestado.
b) Ninguna ha encestado.
c) Solo Ana ha encestado.
d) Al menos una ha encestado.

5. Marco es muy tramposo, así que él arregló una moneda de forma que la probabilidad de salir "águila" es el doble que la de salir "sello".

a) Si se tira la moneda al aire dos veces, ¿cuánto vale la probabilidad de obtener dos "águila"?
b) Si se tira la moneda al aire tres veces, calcula la probabilidad de obtener dos "sello" y una "águila".

6. Pedro y Pablo idean el siguiente juego:

- Cada uno lanza un dado, si en la suma de los dados es mayor que 7, gana Pedro.

- Si la diferencia de ambos es menor que 2, gana Pablo.
- Si ocurren las dos situaciones al mismo tiempo se considera empate.
- Si ninguno de los dos gana también se considera empate.

¿Es un juego equitativo?

7. Al hacer tres lanzamientos de un dado y sumar sus resultados se alcanzó una puntuación total de 12. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) En el primer lanzamiento se obtuviera un 6?
b) En alguno de los lanzamientos se obtuviera un 6?
c) En ninguno de los lanzamientos se obtuviera un 6?

8. Se hacen tres lanzamientos de un dado con las caras numeradas del 1 al 6. Si en el primer lanzamiento sale un 3, ¿qué es más probable, que la suma de las tres puntuaciones sea un número par o que tal suma sea impar?

9. En una empresa trabajan 3 mujeres por cada 2 hombres. Se sabe que el 20% de las mujeres y el 26% de los hombres necesitan gafas. Con esos datos construye una tabla de contingencia que distribuya a los trabajadores según su sexo y necesidad de gafas utilizando la frecuencia absoluta. A partir de los datos de esa tabla, si se elige un empleado al azar halla la probabilidad (en fracción) de los sucesos que se indican:

a) Que sea mujer.
b) Que sea una mujer y necesite gafas.
c) Que sea mujer si necesita gafas.
d) Que sea mujer o necesite gafas.

10. Dos tratamientos A y B curan una determinada enfermedad en un 20% y en un 30% de los casos, respectivamente. Suponiendo que ambos actúan de modo independiente, ¿cuál de las siguientes estrategias es mejor aplicar?

a) Ambos tratamientos a la vez.
b) Primero el tratamiento B, y, si no surte efecto, aplicar el A.

11. Se tiene una urna vacía y se lanza una moneda al aire. Si sale “águila”, se introduce en la urna una bola blanca, si sale “sello", se introduce una bola negra. El experimento se repite tres veces y a continuación se extrae una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que en la urna quede una bola blanca y otra negra? Plantea un diagrama de árbol.

1. ¿A cuánto equivale la suma de 30 números múltiplos de 5 a partir de 20?

2. Una cadena de tienda de chocolates decidió instalar una red de cámaras de seguridad de última generación. La instalación se realizó de la siguiente manera: se instalaron 5 cámaras la primera semana, 7 la segunda semana, 9 la tercera y así sucesivamente por 12 semanas.

a) ¿Cuántas cámaras se instalaron en total?
b) ¿A las cuántas semanas se instalaron 140 cámaras?

3. Determina la suma de las siguientes sucesiones:

a) $(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{5}-2)^2+(\sqrt{5}-2)^3+\ldots$

b) $\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

c) $\frac{1}{1(1+1)}+\frac{1}{2(2+1)}+\frac{1}{3(3+1)}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$

d) $\left(\frac{1}{1(11)}+\frac{1}{2(12)}+\frac{1}{3(13)}+\frac{1}{4(14)}+\frac{1}{5(15)}+\ldots+\frac{1}{n(10+n)}\right)$

e) $(1+6^{2^0})(1+6^{2^1})(1+6^{2^2})(1+6^{2^3})\ldots(1+6^{2^n})$

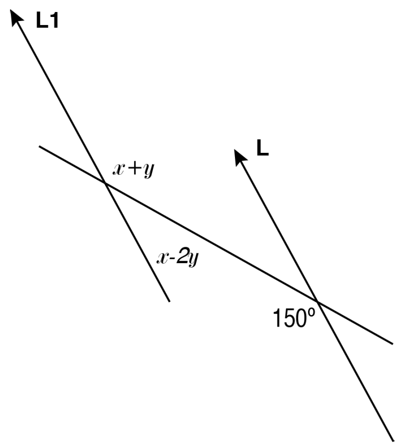
f) $1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2$

g) $1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3$

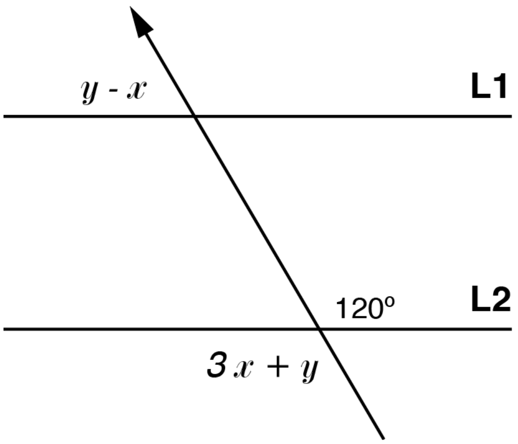
h) $7+\frac{7}{3}+\frac{7}{9}+\frac{7}{27}+\ldots$

i) $1\times 1!+2\times 2!+3\times 3!+4\times 4!+\ldots+n\times n!$

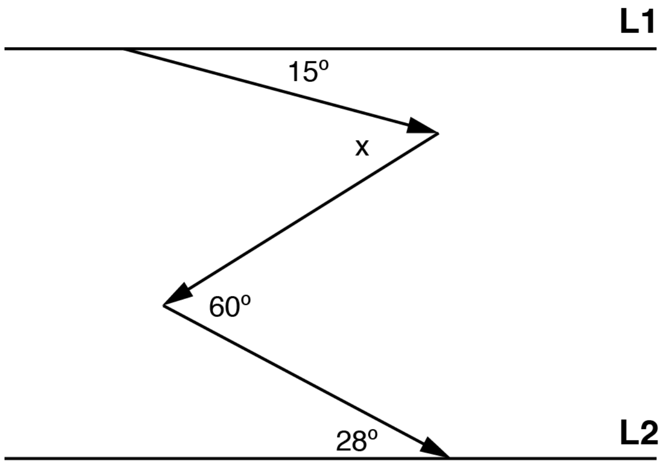
1. Las rectas L1 y L son paralelas. encuentre el valor de “x” y “y”.



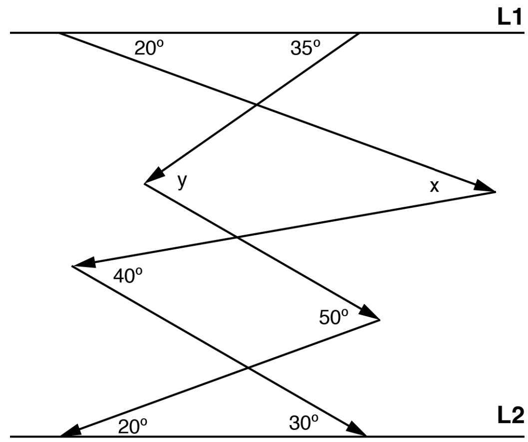
2. Las rectas L1 y L2 son paralelas entre sí. Encuentre los valores de las variables “x” y “y”.



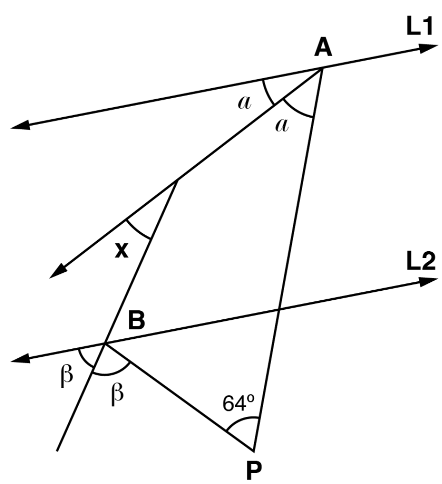
3. En la figura L1||L2. Encuentre el valor de x.



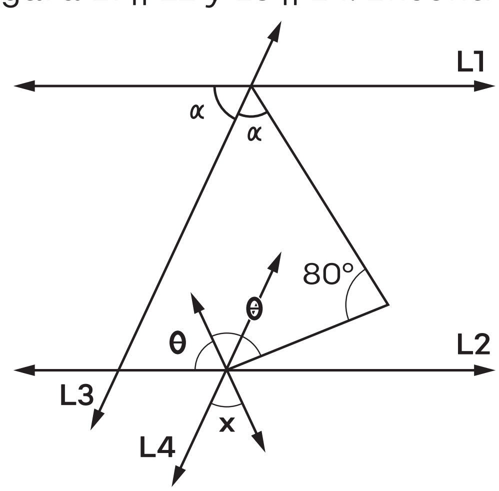
4. Si L1 || L2, calcula el valor de y − x.



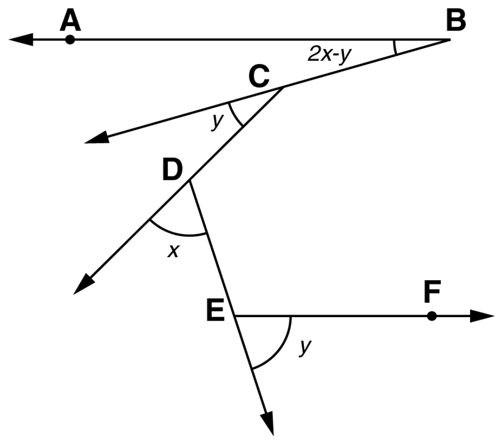
5. Encuentra el valor de x, si L1 || L2.



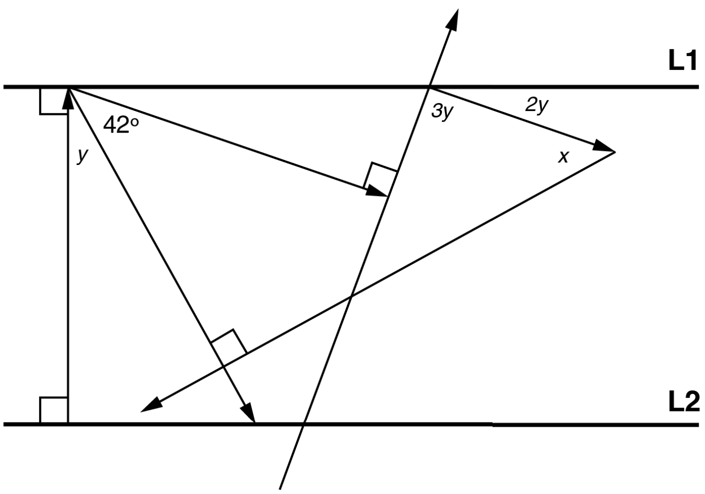
6. En la siguiente figura L1 || L2 y L3 || L4. Encontrar el valor de x.



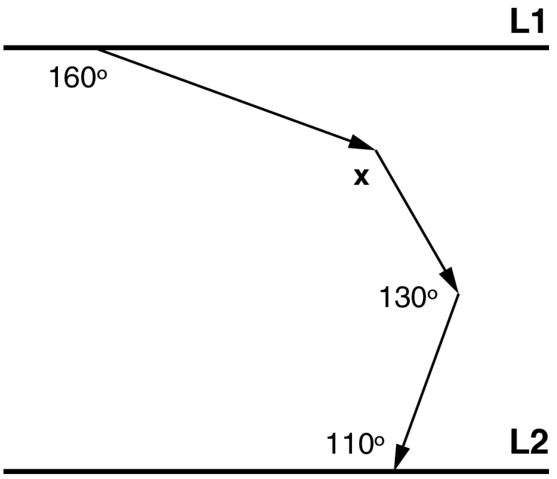
7. En la figura, BA || EF. Encuentre el menor valor entero de x.



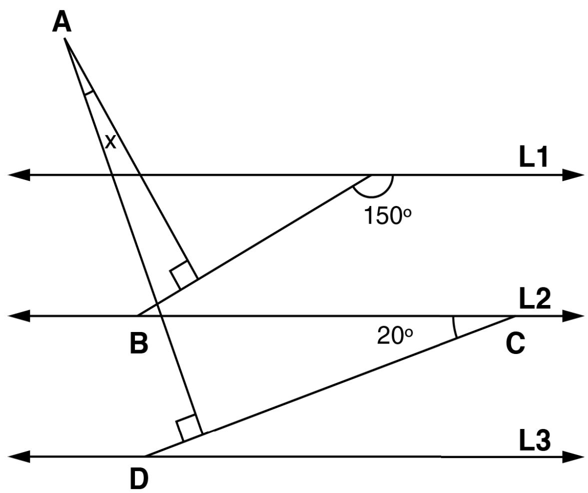
8. En la figura que sigue L1||L2 ¿Cuánto miden el ángulo x y el ángulo y?



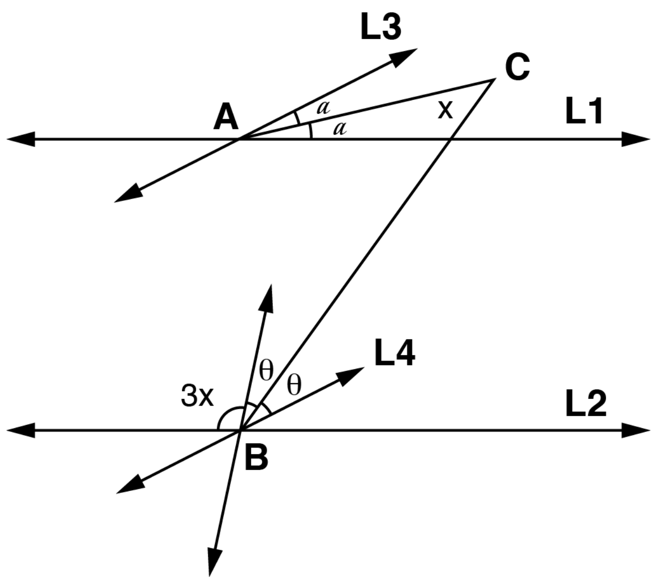
9. En la figura L1 || L2. Encuentre el valor de x.



10. En la siguiente figura L1, L2 y L3 son paralelas entre sí. Encuentre el valor de “x”.



11. En la figura que sigue, L1||L2 y L3||L4. ¿Cuánto mide x?



1. ¿Es posible que alguna potencia del 2 termine en 1982?

2. Juan tiene 5 tarjetas con el número 2, 8 tarjetas con el número 3, 10 tarjetas con el número 7 y 20 tarjetas con el número 8, y las usa para formar números de varias cifras, colocándolas en fila. ¿Puede formar un número que sea un cuadrado perfecto?

3. ¿Cuál es el residuo que resulta de dividir 2^{2014} entre 7?

4. Sin hacer la operación, ¿será que $2019^4 + 2018^4$ es múltiplo de 3?

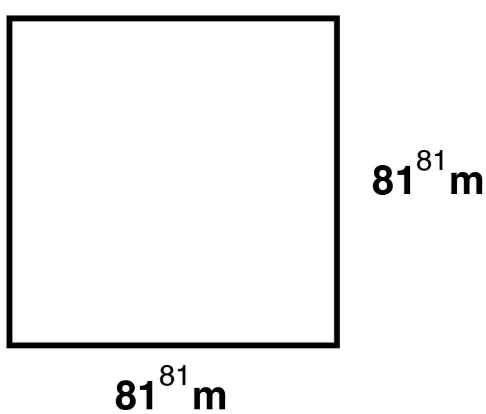
5. ¿Cuál es el residuo que resulta de dividir 3^{2014} entre 5?

6. Encuentra el residuo cuando $76^{2018}-76$ se divide entre 100.

7. Encuentra los últimos tres dígitos de 25^{25}. ¿Y cuál es el siguiente dígito?

8. Encuentra los últimos dos dígitos de 2018^{2018}.

9. Martina quiere poner listones de color amarillo de 7 cm de largo alrededor de su terreno. Martina le compró el terreno a su amiga Beatriz, que es matemática, así que le dio las medidas indicadas en la figura. ¿Cuántos cm de listón le van a sobrar a Martina al colocar su último listón?



10. Considera la siguiente suma: $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2019^2$. Sin calcular la suma, ¿el resultado es múltiplo de 3? ¿Y de 9?

11. Mariana hizo la suma $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 123456789^2$ en la supercalculadora de su escuela. Después sumó los dígitos del resultado y la suma la dividió entre 9 en el pizarrón. Borró todo, pero dejó el residuo y lo volvió a dividir entre 9 en el pizarrón. Volvió a borrar todo menos el residuo y a dividir entre 9. Repitió este proceso de división hasta que le quedó un número de un solo dígito. ¿Qué número le quedó al final?

12. ¿Cuántas parejas de números enteros no negativos (a, b) satisfacen la siguiente igualdad $2^a - 2^b = 63$?

13. Demuestra que $11 \mid 3^{2n+2} + 2^{6n+1}$, para cualquier valor entero de $n \geq 0$.

14. Demuestra que $17 \mid 3^{4n+2}+2(4^{3n+1})$, para cualquier valor entero de $n \geq 0$.

1. De un grupo de 20 estudiantes se va a escoger un presidente, un vicepresidente y un tesorero. ¿De cuántas maneras se puede realizar esta elección?

2. De entre los 11 miembros de un grupo de payasos de circo, ellos deben de votar por un payaso que trabaje con monos, otro que trabaje con elefantes y otro que trabaje con tigres. ¿Cuántos resultados diferentes puede tener la elección?

3. ¿Cuántos números de cinco cifras hay tales que todas sus cifras son dígitos pares?

4. Considerando el problema anterior, ¿cuántos hay tales que todos los dígitos del número son pares y diferentes entre sí?

5. ¿Cuántas palabras diferentes (con o sin sentido) se pueden formar con todas las letras de la palabra JALISCO?

6. ¿Y si sólo utilizamos 5 letras de la palabra JALISCO?

7. ¿Y si sólo utilizamos 3 letras de la palabra CAPIROTADA?

8. ¿Y con todas las letras de la palabra JERICALLA?

9. ¿Y con todas las letras de la palabra BARBACOA?

10. ¿Cuántas palabras de cuatro letras (con o sin sentido) hay tales que puedan usar cualquier letra en cualquier orden del siguiente conjunto: {q, w, e, r, t, y}?

11. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 7 personas en 7 sillas alrededor de una mesa circular, si consideramos que todas las rotaciones de una posición son equivalentes?

12. Mario hizo galletas con betún de sabores diferentes y quiere ponerlas en una caja circular. En la caja caben 9 galletas. ¿De cuántas maneras las puede acomodar en la caja?

13. Si en el problema anterior hay galletas con betún de chocolate y betún de limón que no pueden estar una junto a la otra en la caja, ¿de cuántas maneras se pueden acomodar?

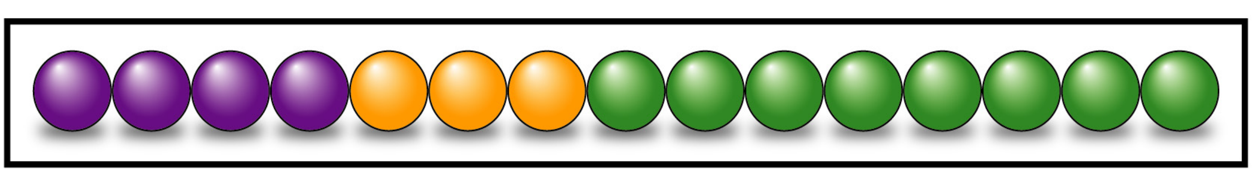
14. 2019 niños van a jugar un juego en el que se toman de las manos y forman una rueda. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar?

15. Se quieren pintar las 8 casas de una cuadra. Si hay 5 colores diferentes, ¿de cuántas maneras se pueden pintar?

16. Jimena tiene 26 carritos de juguete que son iguales. Cuando termina de jugar, su papá le dice que debe de guardarlos en cajas. Si María tiene 3 cajas iguales para sus carritos, ¿de cuántas maneras los puede guardar? Puede quedar una o más cajas vacías.

17. Francisca va a comprar una docena de flores. En la florería hay claveles, girasoles y gerberas. ¿De cuántas maneras puede escoger Francisca su docena de flores si puede escoger las que quiera de cualquier tipo?

18. José Pedro quiere regalarle a su amigo Esteban una caja de canicas. En la caja caben 15 canicas y José Pedro la quiere llenar con canicas de a lo más tres colores diferentes. Además, las va a acomodar de tal manera que todas las canicas de un color queden una junto a la otra. En la figura se muestra un ejemplo del acomodo de las canicas. Si en la tienda venden canicas de color azul, rojo, morado, verde y amarillo, ¿cuántas cajas diferentes puede regalar José Pedro?



1. ¿Cuál es el residuo de 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + … + 2020! entre 9?

2. Dado que $5x \equiv 6 (\mathrm{mod} 8)$, describe los valores de *x* para los cuales la expresión es cierta.

3. ¿Para cuántos valores de enteros positivos de $x \leq 100$, $3^x - x^2$ es divisible por 5?

4. El número 30! termina en 7 ceros. ¿Cuál es el número que va justo antes de esos ceros?

5. ¿Cuántas parejas (a,b) existen tal que el número 30a0b03 es divisible por 13?

6. Encuentra el número de enteros dentro del siguiente intervalo: $1 \leq n \leq 25$ dado que $n^n + 3n + 2$ es divisible por 6.

7. La Profesora Fernández le aplicó un examen de sociología a cinco estudiantes de la facultad. Al calificar, ella vació sus calificaciones al azar en una hoja de cálculo. La hoja de cálculo calculó la calificación promedio cada vez que una calcificación nueva se añadía. La profesora Fernández notó que después de vaciar cada calificación, el promedio siempre era entero. Las calificaciones que ella vació (esta vez organizadas en orden ascendente) son: 71, 76, 80, 82 y 91. ¿Cuál era la última calificación que la Profesora Fernández puso en su hoja de cálculo?

8. En el año *N* el día número 300 es un martes. En el año N + 1, el día número 200 también es un martes. ¿En qué día de la semana cayó el día 100 del año N - 1?

9. Prueba que $2^n + 6 \times 9^n$ es múltiplo de 7 para cualquier entero.

10. Prueba que $n^7 - n$ es divisible por 42 para cualquier entero n.

11. Sea S un grupo de enteros entre 1 y 240 que contienen dos 1's cuando se escriben en base dos (o binario). ¿Cuál es la probabilidad de que un miembro de ese grupo sea divisible por 9?

12. Usa aritmética modular para probar el criterio de divisibilidad del 9.

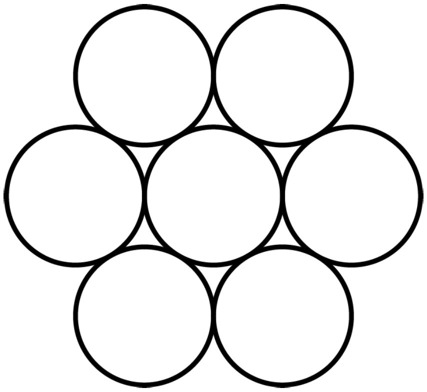
A veces necesitamos permutar o acomodar objetos en alguna forma en especial. Cuando permutamos de manera circular, además de las cosas que normalmente debemos de considerar al permutar, debemos de estar conscientes de que todas las rotaciones de un mismo acomodo se consideran idénticas.

1. ¿De cuántas maneras se pueden sentar cuatro amigos a comer en una mesa redonda?

¿Y tres?

2. En un grupo de 6 amigos, hay una pareja de novios. ¿De cuántas maneras pueden sentarse alrededor de una fogata, si los novios deben sentarse siempre juntos?

3. El logotipo del nuevo producto de Leo debe de pintarse con 7 colores diferentes, un color por cada circunferencia. Si Leo ya escogió los siete colores, ¿de cuántas maneras se puede pintar su logotipo?

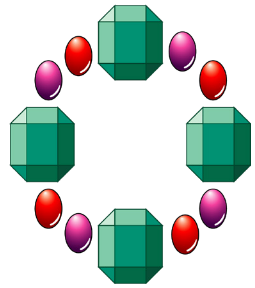


4. Emilia quiere hacer una pulsera con nueve colores diferentes. Dos de esos colores son el amarillo y el naranja. A ella le gusta cómo se ven juntos, así que le gustaría tenerlos siempre juntos en su pulsera. ¿De cuántas maneras puede diseñar su pulsera Emilia?

5. Un joyero muy importante recibió el encargo de la Reina para hacerle un collar con 12 piedras preciosas diferentes.

a) ¿De cuántas maneras se puede confeccionar el collar?

b) Después de encargarle ese collar, la reina le encargó uno en el que cada dos piedras diferentes se encuentre una esmeralda, como se muestra en la figura. ¿De cuántas maneras se puede crear el segundo collar?



6. Cinco niños van a bailar tomados de las manos. Pueden acomodarse en uno o en varios círculos y también pueden bailar niños solos. ¿De cuántas maneras pueden acomodarse para bailar?

7. Siete caballeros y el Rey Arturo van a sentarse en la mesa redonda. Sir Galahad y Sir Tristán acaban de tener un duelo y prefieren no sentarse juntos ni uno frente al otro (en puntos diametralmente opuestos en la mesa).

a) ¿De cuántas maneras pueden acomodarse en las sillas?
b) Si además Sir Lancelot quiere sentarse junto al Rey Arturo, ¿Cuántas maneras habrá de ocupar los lugares alrededor de la mesa?

8. Juliana tiene 4 canicas grandes, 7 canicas agüitas y 2 canicas metálicas. ¿Cuántas formas hay de que Emilia acomode sus canicas en un círculo?

9. En la asamblea de un pueblo se van a sentar en un círculo la matrona, el tesorero, tres guerreras, dos guerreros y cuatro niños. ¿De cuántas maneras distintas pueden acomodarse en el círculo si no importa el orden de las personas que sean del mismo grupo? (Es decir, no importa el orden de las guerreras, no importa el orden de los guerreros ni el orden de los niños).

10. En el planeta Amino, el sistema de escritura consiste en palabras circulares, a diferencia de las palabras terrestres que se escriben en líneas. Tienen en Amino siete diferentes letras. ¿Cuántas palabras de 6 letras distintas pueden escribirse en la escritura de Amino?

11. La princesa Nieves vive en un iglú en forma de media esfera. Alrededor va a poner a sus guardias para que protejan su iglú. Le pidió a un oso polar, tres focas y cinco pingüinos que patrullen caminando en círculo. ¿De cuántas maneras pueden acomodarse los guardias alrededor del iglú?

1. En el grupo de Martina hay trece personas, ella y su mejor amigo Jamal hicieron una apuesta: Martina dice que siempre hay al menos dos personas que nacieron el mismo mes, Jamal dice que siempre hay al menos tres personas que nacieron el mismo mes. ¿Quién ganará la apuesta y por qué?

2. Explica por qué en un conjunto de 101 números, siempre hay al menos dos cuya diferencia es múltiplo de cien.

3. ¿Cuál es el menor número de personas necesarias para que podamos asegurar que hay dos con la misma fecha de cumpleaños?

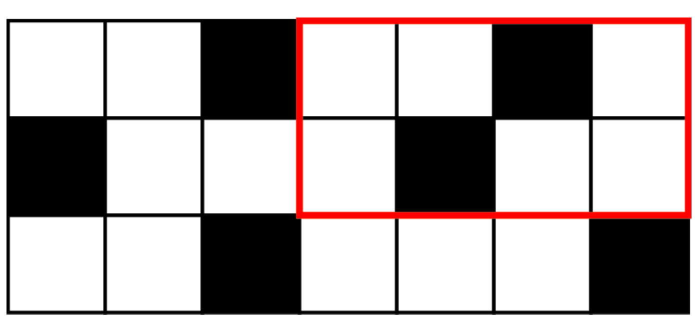
4. En un cajón, hay calcetines de varios colores. Sabemos que si sacamos 11 calcetines, habrá dos calcetines del mismo color. ¿Cuántos colores distintos de calcetines hay en el cajón?

5. Dados ocho números enteros positivos distintos, todos ellos menores que quince, se enlistan todas las diferencias (positivas) entre parejas de ellos. Demuestra que hay un número que aparece al menos tres veces en dicha lista.

6. Demostrar que, en una fiesta hay dos personas que conocen al mismo número de personas en la fiesta.
Nota: Si A conoce B, entonces B conoce a A.

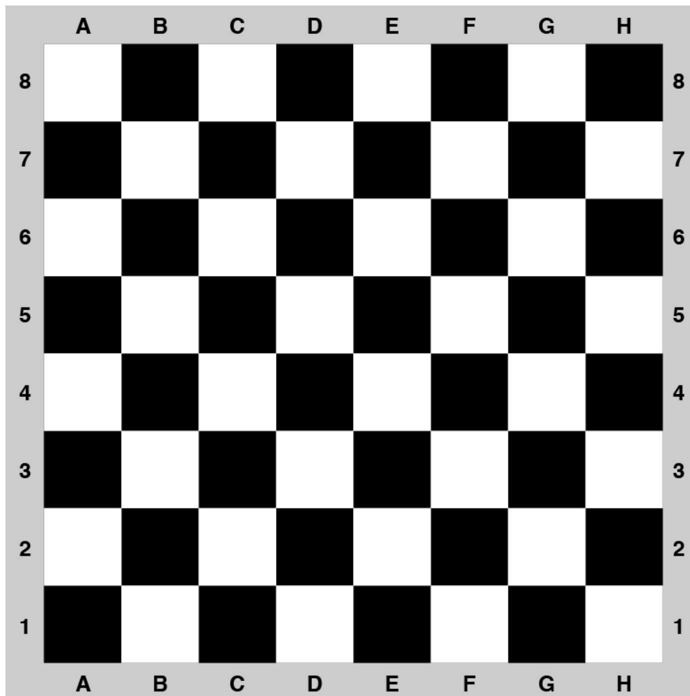
7. ¿Cuál es el menor número de cuadros de un tablero de 8×8 que podemos colorear de manera que si colocamos una ficha de triminó (3×1) sobre el tablero, aseguramos que al menos uno de los cuadros que cubra esté coloreado?

8. Cada cuadrito de un tablero de 3×7 se colorea con alguno de dos colores (digamos blanco y negro). Muestre que en cualquier coloración siempre hay un rectángulo del tablero que tiene los cuatro cuadritos de las esquinas del mismo color. Por ejemplo, la siguiente imagen muestra un ejemplo de coloración en el que el rectángulo subrayado tiene cuatro esquinas blancas.

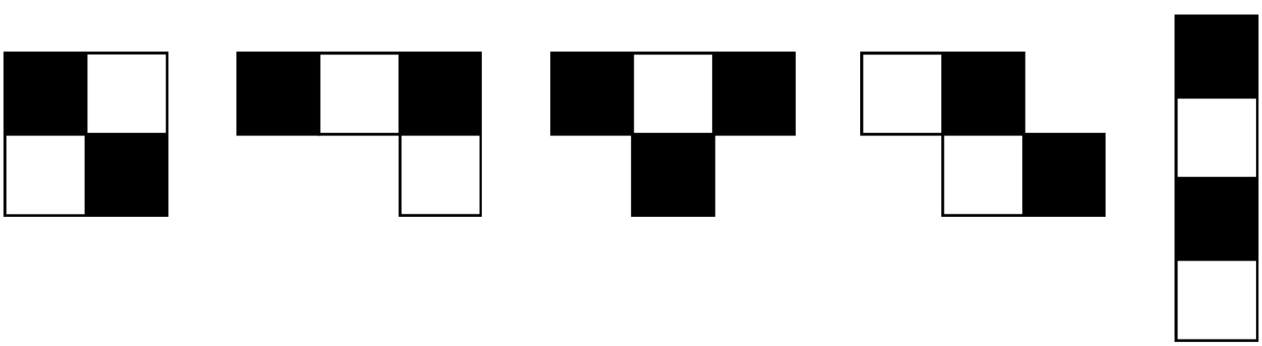


9. ¿Es posible rellenar un tablero de ajedrez con fichas de dominó sin traslaparse si:

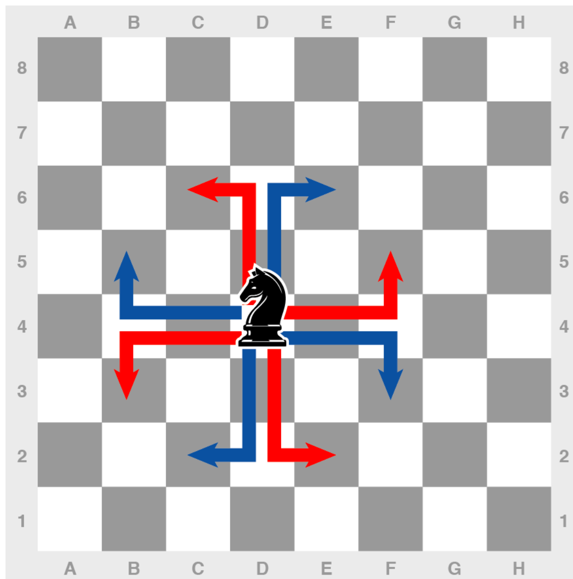
a) Se remueven dos esquinas opuestas?
b) Se remueven dos esquinas del mismo lado del tablero?



10. ¿Se puede rellenar un tablero de 5 x 4 utilizando al menos una vez cada tipo de tetraminó (los mostrados en la figura) sin traslaparse?

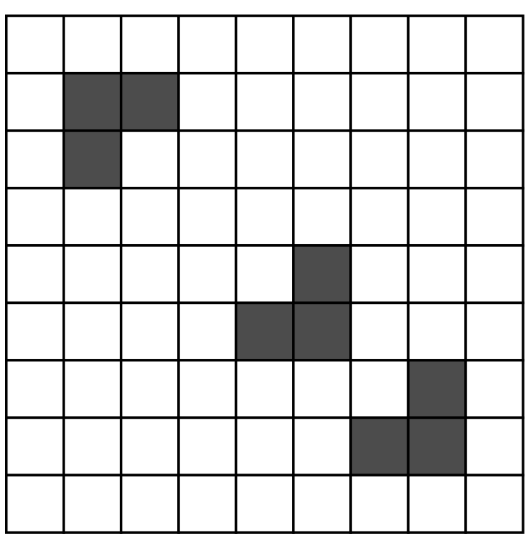


11. En un tablero de 7 × 7, el movimiento del caballo consiste en saltar dos casillas en una dirección, y luego otra casilla en otra dirección perpendicular a la primera.



¿El caballo puede caer en todas las casillas y volver a la casilla donde inició?

12. Pedro está tratando de completar un rompecabezas como el siguiente (tablero de 9 × 9) y ya colocó 3 de sus fichas, las cuales todas son idénticas. ¿Será posible completar el rompecabezas con estas fichas ya colocadas?



1. Encuentra el valor de la siguiente fracción:

$$\frac{1*2*3+2*3*4+3*4*5+...+60*61*62}{1953}$$

2. Calcula el valor de la siguiente suma:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+...+\frac{1}{2013\sqrt{2012}+2012\sqrt{2013}}$$

3. Encuentra el mayor valor entero m tal que:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+...+\frac{1}{\sqrt{23}+\sqrt{25}}>m$$

4. Simplifica la siguiente expresión:

$$\left(1-\frac{1}{31}\right)*\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{30}\right)*\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{29}\right)*...*\left(\frac{1}{30}-\frac{1}{2}\right)*\left(\frac{1}{31}-1\right)$$

5. Resuelve:

$$\frac{2+4+6+...+20}{8+16+24+...+80}$$

6. Encuentra el valor de la suma siguiente:

$$\frac{1}{2014}+\frac{3}{2014}+\frac{5}{2014}+...+\frac{2013}{2014}$$

7. Encuentra el valor de la siguiente expresión:

$$(2+1)\left(2+\frac{2}{3}\right)\left(2+\frac{1}{2}\right)\left(2+\frac{2}{5}\right)\left(2+\frac{1}{3}\right)...\left(2+\frac{2}{9}\right)$$

8. Calcula el resultado de:

$$20142015 \times 20152014 - 20142014 \times 20152015$$

9. Si $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+...=x$, escribe $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+...$ en términos de x.

10. Encuentra el valor exacto de: $\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+...}}$

11. Encuentra el valor de: $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+...}}}$

12. Encuentra el último dígito de: $1^{2019}+2^{2019}+3^{2019}+...+2019^{2019}$

13. ¿Cuál es el valor de la siguiente fracción: $\dfrac{1}{\frac{1}{2016}+\frac{1}{2017}+\frac{1}{2018}+\ldots+\frac{1}{2024}+\frac{1}{2025}}$? (Escribe tu respuesta como el número entero más cercano. Por ejemplo, si tu respuesta es 123.56, entonces escribe tu respuesta como 124).

14. Calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{21! - 21}{1 * 1! + 2 * 2! + 3 * 3! + \ldots + 19 * 19!}$

b) $-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \ldots + 2016 - 2017 + 2018 - 2019$

15. Encuentra la suma de los dígitos de A, donde A está expresada de la siguiente manera:

$$A = 9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots + \underbrace{999\ldots999}_{2019 \text{ dígitos}}$$

16. Encuentra el valor de: $\dfrac{1}{1+2\left(\frac{1}{1+2\left(\frac{1}{1+\ldots}\right)}\right)}$

17. Expresa el valor de la siguiente suma para cualquier n:

$$n = (2k+6) + (2k+8) + (2k + 8) + \ldots + (2k+n)$$

18. Una secuencia de números $a_1, a_2, a_3, \ldots$ satisface lo siguiente:

a) $a_1=\frac{1}{2}$

b) $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = n^2 a_n$

Encuentra el valor de a_{100}

1. Encuentra el total de tripletas ordenadas de enteros positivos (x, y, z), tal que $x + y + z = 2020$.

2. Un panadero vende tres tipos de panes: donas, conchas y trenzas. Le quedan 9, 3 y 5 de cada uno, respectivamente. ¿De cuántas maneras se puede ordenar una docena de panes?

3. En el ejército de Rosar hay 20 armaduras escarlatas, 20 de platino y 20 de acero. ¿De cuántas maneras se pueden elegir 20 armaduras de entre todas?

4. Seldon está por retirarse de las labores administrativas y decide realizar una votación entre los 30 científicos para elegir al nuevo encargado. Si hay 5 candidatos, ¿cuántas distribuciones de los votos hay?

Nota: Solamente se puede votar una vez.

5. Karla tiene 4 canicas azules, 4 blancas y 4 rojas. ¿Cuántas maneras hay de repartirla entre 6 cajas?

Nota: Puede haber cajas vacías.

6. ¿Cuántos números de tres cifras o menos hay tales que la suma de sus dígitos sea 9?

7. ¿Cuántos números de cuatro cifras hay tales que la suma de sus dígitos sea 9?

8. ¿Cuántos números de cuatro cifras o menos hay tales que la suma de sus dígitos sea 12?

9. ¿Cuántos números de cuatro cifras hay tales que la suma de sus dígitos sea 11?

10. En una escuela todos los estudiantes deben inscribirse a un club. Hay club de bordado, de escalada, de repostería, de cultivo de hortalizas y de escritura. A esa escuela asisten 64 niños.

a) Si no hay límite de cuántos niños puede haber en cada club, ¿de cuántas maneras pueden conformarse los grupos de los clubes?
b) ¿Y si en cada grupo debe haber por lo menos dos niños?

11. Ana va a guardar sus 28 canicas en su mochila, que tiene dos bolsas laterales, una bolsa frontal y una bolsa grande.

a) ¿De cuántas maneras puede echar sus canicas en la mochila si puede usar cualquiera de las bolsas?
b) ¿Y si una de las bolsas laterales se está rompiendo y como máximo puede guardar ahí tres canicas?

12. Doña Juana va a repartir 500 pesos entre sus 7 hijos. ¿De cuántas maneras puede hacer la repartición?

Las desigualdades son expresiones algebraicas donde los miembros no están separados por un signo de igual (=), pero aparecen otros signos que describen los miembros de manera relativa. Los signos de las desigualdades son los siguientes:

$>$ Mayor que
$\geq$ Mayor o igual que
$<$ Menor que
$\leq$ Menor o igual que

Las desigualdades se comportan de manera similar a las igualdades en cualquier ecuación. Por ejemplo, cuando se suma o resta la misma cantidad a ambos miembros, la desigualdad se mantiene, como se muestra a continuación:

$$\text{Si } a > b, \text{ entonces } a + c > b + c$$
$$\text{Si } a > b, \text{ entonces } a - c > b - c$$

Resuelve las siguientes desigualdades:

a) $x + 3 > 9$
b) $2w + 4 > w + 22$
c) $-4a + 2 < 1$

Ahora verifica tus respuestas con valores de las variables. Asegúrate de que la dirección de la desigualdad se cumpla.

¿No se cumplieron todas? Las desigualdades se comportan como las ecuaciones, excepto en el caso en el que se multiplica o divide los dos lados de la desigualdad por un número negativo, entonces la desigualdad cambia su sentido. Por ejemplo:

$$-3a < 12$$
$$\frac{-3a}{-3} > \frac{12}{-3}$$
$$a > -4$$

1. Resuelve las siguientes igualdades:

a) $\frac{-a}{5} < \frac{35}{8}$

b) $-\frac{1}{3} > -12x$

c) $\frac{15}{2}+x > -\frac{37}{4}$

2. Dado que x es un entero tal que $-4 \le x \le 3$, y y es un primo. Encuentra el mayor valor posible de $x^2 - y^2$.

3. Si x es un número positivo, ¿cuál de las siguientes opciones no es cierta siempre?

a) $x^0 = 1$
b) $\sqrt{x} > 0$
c) $x + \frac{1}{x} \neq 0$
d) $x^6 > 0$
e) $x^4 > x^2$

4. Encuentra el rango de valores para k tal que $kx^2 - 2x + (2k-1) > 0$ para todo x dentro de los reales.
Nota: Escribe el rango en el siguiente formato: $a \le k \le b$.

5. Dado que en las siguientes expresiones x y y son números enteros no necesariamente positivos, encuentra el menor valor posible para x – y.

$$\frac{1}{7} < \frac{\sqrt{x}}{x} \le \frac{1}{5}$$

$$\frac{3}{4} < 1 - \frac{\sqrt{y}}{y} \le \frac{8}{9}$$

6. ¿Cuántos enteros no necesariamente positivos n satisfacen la siguiente desigualdad?

$$2010 < \sqrt{n(n-1)} < 2016$$

7. Dado que $6 \le a \le 7$ y $-3 \le b \le 5$, encuentra el mayor valor posible para:

$$\frac{a^2-b^2}{b-a}$$

8. Dado que $-5 \le x \le 3$ y $-8 \le y \le -2$, encuentra el mayor valor posible para xy.

9. ¿Cuántos enteros n satisfacen la siguiente desigualdad?

$$(x-3)(x+7)(x-8)(x+4) < 0$$

10. Encuentra el rango de números reales positivos k satisfacen la siguiente desigualdad:

$$0 < \sqrt{(k+1)(k-4)} < \sqrt{6}$$

11. Dado que $-16 \leq 2(y-7) \leq 0$ y $-7 \leq x \leq 8$, encuentra el menor valor posible de xy.

12. Dado que $a > b > c$, ¿cuál de los siguientes incisos equivale a la siguiente expresión?

$$\sqrt{(c-2a+b)^2} + \sqrt{(b-a)^2} + \sqrt{(c-a)^2} + \sqrt[3]{(c-b)^3}$$

a) $3c-4a+b$

b) $4a-b-3c$

c) $c-b$

d) $4a-3b-c$

e) $4a-b-3c$

13. Dado que $x < 0$, simplifica la siguiente expresión: $\sqrt{x^2} + (-1^4)\sqrt[3]{64x^3}$

Cuando resolvemos problemas de geometría, tendemos a buscar las características y propiedades de las construcciones geométricas pero también podemos aprender mucho de su construcción. En esta sesión vamos a aprender estas características a través de la construcción con regla y compás. Esto lo haremos con ciertas reglas.

Imagina que sólo tienes lo siguiente:

- Una regla 'ideal': Esta es una regla que no está graduada y es infinita, es decir, sólo se puede trazar una recta o segmento a partir de dos puntos.
- Un compás 'sin memoria': este compás puede trazar círculos con dos puntos cualquiera en el plano. Sin embargo, una vez trazando el círculo, el compás 'olvida' cuánto abrió.

Con estas herramientas se pueden hacer las siguientes construcciones básicas:

1. Trazar un segmento que pase por dos puntos (este también puede ser una recta infinita).
2. Trazar una circunferencia que tenga centro en un punto y pase por otro punto.
3. Encontrar el punto de intersección entre dos rectas no paralelas.
4. Encontrar el o los puntos en los que se cruzan una recta y una circunferencia.
5. Encontrar el o los puntos en los que se cortan dos circunferencias.

Con estos 5 trazos básicos podemos hacer cualquier otra construcción geométrica.

Realiza las siguientes construcciones con la regla 'ideal' y un compás 'sin memoria':

1. Dada una recta cualquiera, traza una perpendicular a ella usando regla y compás.

2. Traza la bisectriz de un ángulo con regla y compás.

3. Dadas dos rectas paralelas μ y δ, y un punto A externo a ellas, traza una recta paralela a ambas que pase por A.

4. Construye un triángulo equilátero con regla y compás.

5. Construye un cuadrado con regla y compás.

6. Dadas dos rectas paralelas l y m y un segmento AB sobre l, traza un segmento tres veces más grande que AB.

7. Dadas dos rectas paralelas l y m, el segmento AB y el punto C ambos sobre l, construye sobre l el segmento CD igual al segmento AB.

8. Se tiene un triángulo ABC cualquiera.

a) Traza la bisectriz, la mediana y la altura desde el vértice A.
b) Considera las intersecciones de las prolongaciones de las líneas trazadas en el inciso anterior con la circunferencia circunscrita. Traza un triángulo con vértices en dichos puntos.

Nota: Recuerda hacer todos tus trazos únicamente usando la regla y el compás.

9. Dada una circunferencia y su centro, inscribe un cuadrado en dicha circunferencia usando solamente la regla.

1. ¿Cuántos enteros positivos dividen a 20!?

2. ¿Cuántas listas de 7 números de dos cifras son tales que cada tres términos consecutivos de la lista tienen suma múltiplo de 3? En cada lista pueden repetirse números.

3. Encuentra todas las parejas de números (x, y) que satisfaga las siguientes condiciones:

a) x y y son enteros.
b) $x > 2$
c) $2x^2 = y(y + 2)$

4. María escribió un número de 125 dígitos en su computadora sólo usando 0's y 1's de la siguiente manera: Ella presionó 1, después 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, y así sucesivamente, cada vez intercalando un cero más entre los 1's. Cada vez que el número que se ha escrito hasta ese momento es múltiplo de 3, suena un timbre en la computadora. Por ejemplo, el timbre sonará después de la sexta tecla y también después de la séptima. ¿Cuántas veces habrá sonado el timbre después de que Maria termine de escribir el número?

5. Encuentra todos los números primos p para los cuales $p^2 + 77$ tiene exactamente 5 divisores.

6. ¿Para qué enteros positivos n se tiene que el mayor entero menor o igual que $\frac{n^2}{3}$ es un número primo?

7. En cierto juego hay varios montones de piedras que pueden modificarse de acuerdo a las siguientes 2 reglas:

a) Se pueden juntar dos de los montones en uno solo.
b) Si un montón tiene un número par de piedras, se puede partir en dos montones con el mismo número de piedras cada uno.

Al principio hay tres montones, uno de ellos tiene 5 piedras, otro tiene 49 y el otro tiene 51. Determina si es posible lograr con movimientos sucesivos y siguiendo las reglas a) y b), que al final hay 105 montones, cada uno con una piedra.

8. Encuentra todos los números enteros n que satisfagan todas las condiciones siguientes: $n < 1000$, n es múltiplo de 3, n termina en 1 y n es suma de dos cuadrados perfectos.

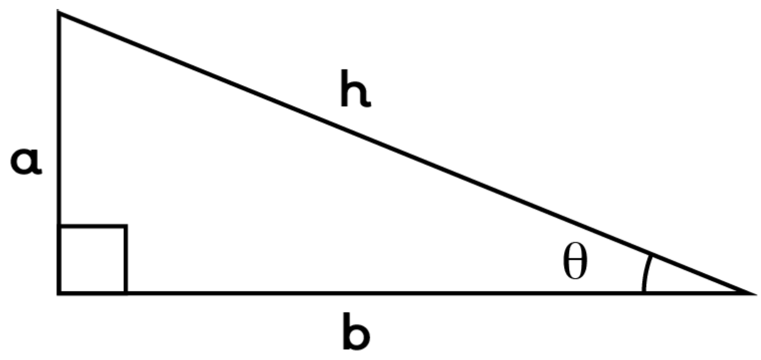
9. Encuentra todos los enteros $A \leq 120$ que tienen exactamente cuatro divisores y tales que la suma de sus divisores es un cuadrado perfecto.

10. Josefina está escribiendo contraseñas para su cuenta de banco. Para hacer una contraseña ella toma tres canicas de un contenedor que tiene canicas numeradas del 1 al 20. Después suma los números en las tres canicas y si el resultado de la suma es múltiplo de 4, entonces lo escribe en su cuaderno de contraseñas. ¿Cuántas contraseñas diferentes escribirá Josefina en su cuaderno?

11. Encuentra todos los números menores que 100 tales que los siguientes números son todos primos: $n + 2$, $n + 4$, $n + 8$ y $n + 16$.

La trigonometría es una rama de la geometría que se dedica a estudiar las relaciones de los ángulos del triángulo y sus lados.

En la siguiente figura se explican las relaciones trigonométricas con respecto al ángulo θ:



Para obtener el **seno** de un ángulo determinado se debe dividir la longitud del cateto opuesto y el de la hipotenusa, es decir cateto opuesto sobre hipotenusa: a/h.

El **coseno** se obtiene a partir de la relación entre la longitud del cateto adyacente y la hipotenusa (cateto adyacente sobre hipotenusa: b/h.

Para obtener la **tangente** se divide la longitud de ambos catetos (es decir se realiza la división: a/b).

Para la función de **cotangente** se divide la longitud del cateto adyacente por el opuesto (entendido como: b/a).

Para la función **secante** se relaciona la longitud de la hipotenusa sobre el cateto adyacente (es decir: h/a).

Finalmente, para determinar la función **cosecante** se divide la longitud de la hipotenusa sobre el cateto opuesto (obteniendo así: h/b).

Resuelve los siguientes problemas:

1. Hallar la longitud de la sombra de un árbol de 12 m de altura cuando los rayos del sol forman con la horizontal un ángulo de 20°.

2. Una escalera de 9 m está apoyada en una pared de forma que alcanza una altura de 5 m. ¿Qué ángulo forma con el suelo?

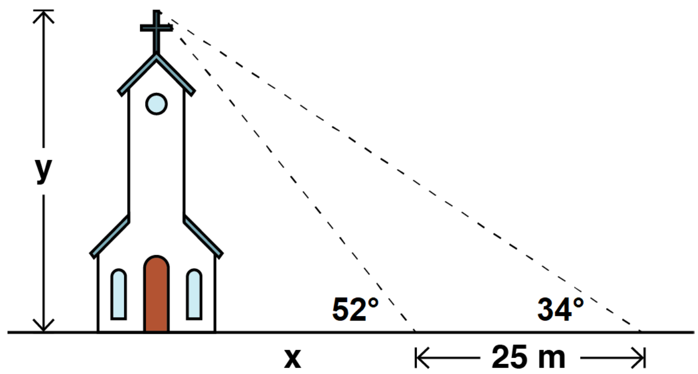
3. Las diagonales de un rombo miden 10 y 14 cm respectivamente. Calcula la medida del lado del rombo y de sus ángulos.

4. De un triángulo isósceles conocemos su lado desigual de 20 cm y su altura de 8 cm, ¿cuánto miden sus ángulos?

5. En la llanura desde un punto medimos el ángulo de elevación a una montaña y se obtiene 35° Acercándose a la montaña una distancia de 200 m se vuelve a medir el ángulo y se obtienen 55°. ¿cuál es la altura de la montaña?

6. Una antena de radio está sujeta al suelo mediante dos cables que forman con la antena ángulos de 36° y 48°. Si los puntos de sujeción de los cables al suelo y el pie de la antena se encuentran alineados y a una distancia total de 100 m, calcula la altura de la antena.

7. Desde el lugar donde me encuentro, la línea visual a la torre de una Iglesia forma un ángulo de 52° con la horizontal. Si me alejo 25 m más de la torre, el ángulo es de 34°. ¿Cuál es la altura de la torre?



8. Dado un trapecio isósceles de base mayor 27 cm, base menor 18 cm y altura 18 cm. Calcular el ángulo que forma el lado oblicuo con la base mayor.

9. Sabiendo que tag $\alpha = ½$ y que $\pi < \alpha < 3\pi/2$, calcular:

a) sen $(\pi/2 + \alpha)$
b) cos $(\pi + \alpha)$
c) tan $(\pi/2 - \alpha)$
d) cot $(\pi - \alpha)$
e) sec $(360° - \alpha)$

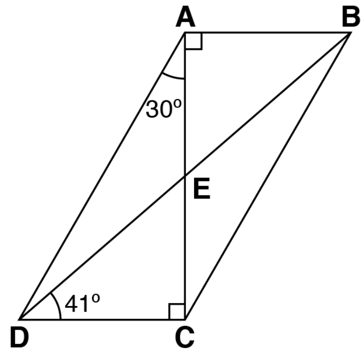
10. Si el sen $\alpha = -2/3$ y α es un ángulo del tercer cuadrante hallar el resto de razones trigonométricas.

11. Calcular sen α, sabiendo que tan $\alpha = 3/2$ y que α es un ángulo del tercer cuadrante.

12. Calcula el valor de tan 2a.

$$sen\ \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

13. Ordena los incisos de mayor a menor, considerando el gráfico que aparece a continuación:



a) $\frac{AC}{BC}$

b) $cos(\measuredangle DEC)$

c) $sen(\measuredangle CDA)$

d) $sen(41º)$

e) $sen(41º)$

1. Si el número de cinco dígitos 4567N es divisible por 8, encuentra el valor de N.

2. En la siguiente operación, cada letra representa un dígito distinto. Encuentra el número de 5 dígitos EFCBH.

$$\begin{array}{r} A\ B\ C\ D\ + \\ E\ F\ G\ B\ \\ \hline E\ F\ C\ B\ H\ \end{array}$$

3. En la siguiente operación, cada letra representa un dígito distinto. Encuentra el número de cinco dígitos MATHS.

$$\begin{array}{r} S\ A\ S\ M\ O\ \times \\ 3\ \\ \hline M\ A\ T\ H\ S\ \end{array}$$

4. En la siguiente operación, cada letra representa un dígito distinto. Encuentra el valor de S+A+S+M+O.

$$\begin{array}{r} H\ A\ H\ A\ + \\ H\ A\ A\ H\ \\ \hline S\ A\ S\ M\ O\ \end{array}$$

5. En la siguiente operación, cada letra representa un dígito distinto. Encuentra el resultado de la multiplicación, que es un número de 4 dígitos.

$$\begin{array}{r} H\ E\ \times \\ E\ H\ \\ \hline \star\ 8\ \\ \star\ \star\ \ \\ \hline \star\ \star\ \star\ \star\ \end{array}$$

6. El número de cuatro dígitos A51A es divisible por 36. Encuentra el valor de A.

7. Dado que 9^7 es igual al número de 7 dígitos a78296b, encuentra el valor de ab sin hacer la multiplicación de 9 siete veces.

8. ¿Cuántos dígitos tiene el número $2^{2019} \times 5^{2023}$?

9. Encuentra un número positivo a tal que la suma $a + 2a + 3a + \cdots + 9a$ resulta ser un número con todas sus cifras iguales.

10. En la siguiente operación todas las letras diferentes son números diferentes. Encuentra el número al que equivale SASMO.

$$\begin{array}{r} STAY+ \\ COOL \\ \hline SASMO \end{array}$$

11. Las sucesiones A y B contienen ambas al 95.

A: 19, 95, 171, 247.... B: 20, 45, 70, 95...

¿Cuál es el siguiente número que es común en ambas sucesiones?

12. ¿Cuánto vale cada letra en la siguiente operación?
A letras iguales corresponde el mismo dígito y dos letras diferentes no pueden tener el mismo valor.

$$\begin{array}{r} ABCDE\times \\ 4 \\ \hline EDCBA \end{array}$$

13. Encuentre todos los números de cuatro cifras ABCD, con la siguiente propiedad: si pasamos la primera cifra al último lugar y del número así obtenido restamos el número original obtenemos 7956.

14. Resuelve la siguiente operación, dado todas las letras diferentes son dígitos diferentes:

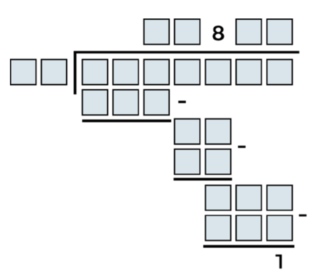
15. ¿Cuántos pares ordenados (a,b) existen si el número de cinco dígitos 2a3b4 es divisible por 12?

$$\begin{array}{r} GOOD+ \\ DOG \\ \hline SUSIE \end{array}$$

16. ¿Cuántas ternas ordenadas existen (x, y, z) tal que su producto resulta 2020?

17. Dado que el número de cinco cifras X234Y es divisible por 72, encuentra el valor de X.

18. En la siguiente división, en cada cuadrito se puede escribir sólo un dígito. Encuentra los valores faltantes.



1. Sean a, b, c, d, e números tales que:

a) $a > b$
b) $e - a = d - b$
c) $c - d = b - a$
d) $a + b = c - d$

Ordena los números de mayor a menor.

2. ¿Cuál de las siguientes oraciones es siempre verdadera?

a) Si $x < 1$, entonces $x^2 < x$
b) Si $x^2 > 0$, entonces $x > 0$
c) Si $x^2 > x$, entonces $x > 0$
d) Si $x^2 > x$, entonces $x < 0$
e) Si $x < 0$, entonces $x^2 > x$

3. ¿Cuántas soluciones enteras hay para el sistema $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ dado que $0 \leq x_1 \leq 5$?

4. Pruebe que si $a \geq b$ y $x \geq y$ entonces $ax + by \geq ay + bx$.

5. Demuestra que si x y y son números reales, entonces la siguiente expresión es cierta: $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$.

6. ¿Para qué valores de x se cumple la siguiente desigualdad?

$$\frac{4x^2}{(1- \sqrt{(1+2x)^2}} < 2x + 9$$

7. Sean a, b, c tres números positivos tales que abc = 1. Prueba que:

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8.$$

8. Un niño tiene fichas redondas que pondrá dentro de los cuadros blancos de una cuadrícula coloreada como el tablero de ajedrez. Seguirá los siguientes pasos: En el primer paso colocará una ficha en un cuadro blanco. En el segundo paso pondrá fichas en todas las casillas blancas que rodean la ficha colocada en el primer paso. En cada uno de los siguientes pasos colocará fichas sobre todos los cuadros blancos que rodean las fichas puestas en el paso anterior. Para ilustrar, en la figura se han hecho los primeros cuatro pasos indicando con números en las casillas según el paso en que se le colocaron fichas encima. Si el niño dispone de 5000 fichas (y la cuadrícula es tan grande como sea necesario), ¿para cuántos pasos completos la alcanzarán sus fichas?

4		4		4		4
	3		3		3	
4		2		2		4
	3		1		3	
4		2		2		4
	3		3		3	
4		4		4		4

9. Se tienen diversas medidas de tendencia central dos de ellas son la media aritmética y la media geométrica. Los siguientes son ejemplos de la media geométrica y la media aritmética para dos enteros positivos x y y:

Media aritmética: $\frac{x+y}{2}$ Media geométrica: $\sqrt{xy}$

Demuestra que la media aritmética es mayor o igual que la media geométrica.

10. Dos números reales x y y suman A; ¿cuál es el máximo producto que pueden tener?

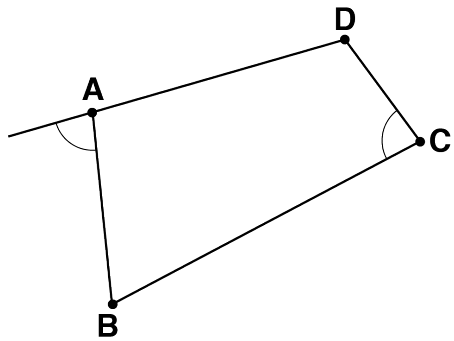
11. Dado que $x < 0$, simplifica la expresión $-1^2 + \sqrt{x^2} - \sqrt[6]{64x^{144}}$

Un cuadrilátero cíclico ABCD es cíclico si sus vértices están todos en la misma circunferencia. Para comenzar a conocer los cuadriláteros cíclicos, trabaja los siguientes problemas:

1. Demuestra que los ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico siempre suman 180°.

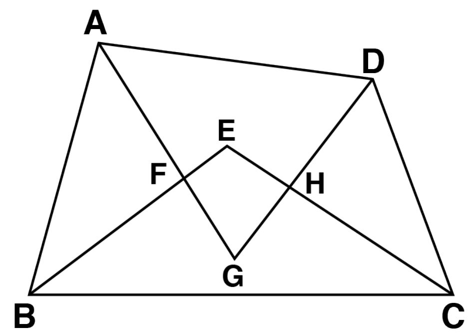
2. Demuestra que si en un cuadrilátero los ángulos opuestos siempre suman 180°, entonces es un cuadrilátero cíclico.

3. Demuestra que el siguiente cuadrilátero es cíclico si los ángulos marcados son iguales.



4. Demuestra que un cuadrilátero es cíclico si y sólo si el ángulo entre un lado y una diagonal es igual al ángulo entre el lado opuesto y la otra diagonal.

5. En la siguiente figura están trazadas las bisectrices de los ángulos interiores del cuadrilátero ABCD, las cuales se intersecan en los puntos E, F, G y H, como se muestra. Prueba que el cuadrilátero EFGH es cíclico.



6. Una línea paralela a la base BC del triángulo ABC corta a AB y a AC en P y Q, respectivamente. El círculo que pasa por P y es tangente a AC en Q corta a AB de nuevo en R. Demuestra que R, Q, C, B están en una misma circunferencia.

7. Por un punto C del arco AB de una circunferencia se han trazado dos rectas arbitrarias X y Y que cortan la cuerda AB en los puntos D y E, respectivamente y a la circunferencia, en los puntos F y G en ese mismo orden. ¿Para cuál posición del punto C en el arco AB, el cuadrilátero DEGF siempre es cíclico sin importar cómo se tracen las líneas?

8. Dado un triángulo ABC, construye un cuadrado inscrito en el triángulo de forma tal que uno de sus lados esté sobre BC. Escribe y justifica los pasos que seguiste para crear tu construcción.

9. Sea ABC un triángulo y sean L y N las intersecciones de la bisectriz del ángulo A con el lado BC y el circuncírculo de ABC respectivamente. Construimos la intersección M del circuncírculo de ABL con el segmento AC. Prueba que los triángulos BMN y BMC tienen la misma área.

10. Demuestra que si un cuadrilátero cíclico tiene sus diagonales perpendiculares, entonces la distancia desde el centro de la circunferencia circunscrita al cuadrilátero hasta un lado es igual a la mitad de la longitud del lado opuesto.

11. Una recta que pasa por un punto K en el interior de un cuadrado ABCD, interseca a los lados opuestos AB y CD en los puntos P y Q, respectivamente. Se dibujan dos circunferencias que pasan por los vértices de los triángulos KBP y KDQ, respectivamente. Prueba que el segundo punto de intersección de las dos circunferencias está sobre la diagonal BD.

PRO=MATE
TALLER DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Manual B 3
fue editado en
septiembre de 2022,
para uso exclusivo
de la Secretaría
de Educación del
Estado de Jalisco.